Ad-Soyad: **No:** **1.Öğretim** ☐ **2.Öğretim** ☐

Sivas Cumhuriyet Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Bilgisayar Mühendisliği Bölümü

Bil2109 Ayrık İşlemsel Yapılar 2018-Güz Final Sınavı Çözümleri

1. $\forall x \in S : P(x)$ evrensel önermesi ile $\exists x \in S : P(x)$ varlıksal önermesini for döngüsü olarak yazınız.(15 puan)

Çözüm.

$\forall x \in S : P(x)$ önermesi için for dögüsü:

```
for x in S {
    if ~P(x){
        return false}
return true}
```

$\exists x \in S : P(x)$ önermesi için for dögüsü:

```
for x in S {
    if  P(x){
        return true}
return false}
```

2. İki kişilik bir oyun düşünün. Bu oyunda iki tane taş yığını var. Sırası gelen oyuncu iki yığından birinden istediği kadar taş çekiyor. Oyunu son taşı çeken kazanıyor.

"*Eğer başlangıçta iki yığında eşit sayıda taş varsa ikinci oyuncu her zaman oyunu kazanır*" önermesini güçlü tümevarım ile kanıtlayınız.

(Başka bir ifadeyle, n bir yığındaki taş sayısı olmak üzere $\forall n \in \mathbb{Z}^{\geq 1}$ için ikinci oyuncu oyunu kazanır). (15 puan)

Çözüm.

Temel durum: $n = 1$ için yığınlarda birer taş vardır. Birinci oyuncu yığınların birinden 1 taş çeker, ikinci oyuncu diğer yığından bir taş çekerek oyunu kazanır.

Tümevarısamsal durum. $n \geq 1$ olmak üzere yığınlarda 1, 2, ..., *n-1* tane taşın olduğu için ikinci oyuncu oyunu kazansın.

Yığınlarda *n* tane taş olduğunda ikinci oyuncunun oyunu kazanacağını göstereceğiz.

Birinci oyuncu bir yığın seçerek bu yığından $k \leq n$ tane taş çeker. Bu durumda ikinci oyuncu seçilmeyen yığından yine k tane taş çeker. Böylece yığınlardaki taş sayısı aynı olur. Bir önceki adımda yığınlarda 1, 2, ..., *n-1* tane taşın olduğu durumlarda ikinci oyuncunun oyunu kazndiğini kabul ettiğimizden; oyunu ikinci oyuncu kazanır.

3. $f(n) = 10n^2 - 13n + 5$ ve $g(n) = n^2$ olsun. $f(n) = O(g(n))$ ve $g(n) = \Omega(f(n))$ olduğunu gösteriniz. (10 puan)

Çözüm.

$f(n) = O(g(n))$ ise $\exists\, c > 0$ ve $\exists\, n_0 \geq 0$: $\forall n \geq n_0$ için $f(n) \leq c \cdot g(n)$ dir.

$n \geq 1$ için $f(n) = 10n^2 - 13n + 5 \leq 10n^2 + 13n^2 + 5n^2 = 28 \cdot n^2 = 28 \cdot g(n)$.

Şu halde $c = 28$ ve $n_0 = 1$ seçilirse $f(n) = O(g(n))$ olur.

Teorem gereği $f(n) = O(g(n))$ ise $g(n) = \Omega(f(n))$ dir. Şu halde $g(n) = \Omega(f(n))$ dir.

4. Alice k =1101100101 sifresini kullanarak harici veya (XOR) şifrelemesiyle BOB'a bir mesaj gönderiyor.

a. Bob'un aldığı şifreli mesaj 0011110010 ise Alice'in gönderdiği orjinal mesaj nedir? (10p)
b. Bu şifreleme açık mı yoksa gizli bir şifreleme midir? Nedeniyle birlikte yazınız.(5 puan)

Çözüm.

a. a ve b aynı uzunlukta iki bit dizisi iken $(a \oplus b) \oplus b = a$ idi.

a orjinal mesaj, b şifre dersek $a \oplus b$ şifrelenmiş mesaj olur. Bu şifrelenmiş mesaji desifre etmek için var olan b şifresi ile $\oplus$ operatörunu kullaniriz.

$a \oplus b$	0011110010
b	1101100101
a	1110010111

b. Bu şifreleme kapalı gizli şifrelemeye bir örnektir. Alıcının ve göndericinin önceden üzerinde anlaştığı gizli bir şifre vardır.

5. Geneleşştirilmiş Sezar şifrelemesinde her harf farklı miktarlarda kaydırılır. Örneğin A kendinden sonra gelen 5. harfle, F kendinden sonra 19. harfle yer değiştirir. Sonuç olarak ortaya çıkan şifreleme A, B, C, Ç, …., Z harflerinin bir sıralamasıdır.(permütasyonudur)

Eğer harfleri bu şekilde tamamen rastgele sıralarsak

a. F harfinin yerinde kalma (yine 7. sırada kalma) olasılığı ne olur? (5 puan)
b. Permütasyon sonucunda R ve T harflerinin yerinde kaldığı biliniyorsa, F harfinin yerinde kalma olasılığı ne olur? Şartlı olasılık formulu kullanarak çözünüz. (10 puan)
c. b şıkkında bulduğunuz olasılılık değeri ile a şıkkinda bulduğunuz olasılık değerlerini karşılaştırınız. Olasılık değerlerindeki artma yada azalma olayını nasıl açıklarsınız? (5 puan)

Çözüm.

F , F harfinin yerinde kalmasi olayı, R , R harfinin yerinde kalmasi olayı ve T , T harfinin yerinde kalmasi olayı olsun.

a.$P[F] = \frac{1 \cdot 28 \cdot 27 \cdot \ldots \cdot 1}{29 \cdot 28 \cdot \ldots \cdot 1} = \frac{1}{29}$

b. F, R ve T harflerinin yerinde kalması olayının olasılığı $P[F \cap R \cap T] = \frac{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 26 \ldots \cdot 1}{29 \cdot 28 \cdot \ldots \cdot 1} = \frac{1}{29 \cdot 28 \cdot 27}$

R ve T harflerinin yerinde kalması olayının olasılığı $P[R \cap T] = \frac{1 \cdot 1 \cdot 27 \ldots \cdot 1}{29 \cdot 28 \cdot \ldots \cdot 1} = \frac{1}{29 \cdot 28}$

R ve T harflerinin harfleri yerinde kalırken, F'nin yerinde kalması olasılığı

$$P[F|R \cap T] = \frac{P[F \cap R \cap T]}{P[R \cap T]} = \frac{\frac{1}{29 \cdot 28 \cdot 27}}{\frac{1}{29 \cdot 28}} = \frac{1}{27}$$

c. R ve T harflerinin harfleri yerinde kalırken, F'nin yerinde kalması olasılığı; hiçbir bilgi yokken F harfinin yerinde kalmasi olasılığından daha büyüktür;yani bu durumda belirsizlik daha azdır. Bir başka deyişle R ve T harflerinin harfleri yerinde kaldı bilgisine sahip olmak belirsizliği düşürmüştür.

6. Bir partide Ahmet, Bülent, Ceyda, Didem, Erdem, Filiz ve Gizem adlı 7 kişi olsun. Bu kişilerden Bülent, Ahmet ve Didem ile arkadaş; Ceyda ve Erdem yalnızca Ahmet ile arkadaş ve Filiz yalnızca Didem ile arkadaş olsun. Gizem ise henüz partiye gelmemiş Hande tarafından çağrılmış ve henüz bir arkadaşı olmamış olsun.

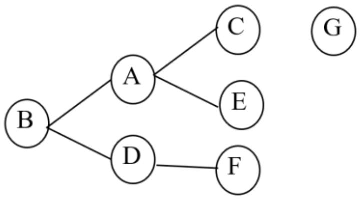
Bu durumda

a. Partideki kişilerin arkaşlık ilişkilerini gösteren bir graf çiziniz.(5 puan)
b. a şıkkında çizdiğiniz grafın iki parçalı graf mı olur? Neden?(10 puan)
c. a. şıkkında çizdiğiniz graftan faydalanarak Ahmet'in arkadaşlık bağı ile bağlı olduğu kişileri genişlik öncelikli arama (breadth first search) ile bulunuz. (10 puan)

Çözüm.

Ahmet, Bülent, Ceyda, Didem, Erdem, Filiz ve Gizem sırasıyla A,B,C,D,E,F ve G harfleriyle gösterilsin.

a.



b. Yukarıdaki graf iki parçalı (bipartite) graftır. Gerçekten, eğer A ve D düğümleri bir parça $\{A, D\}$; geri kalan düğümler diğer parça $\{B, C, E, F, G\}$; olacak şekilde ikiye ayrılırsa her bir bağın bir bitiş noktası birinci parçada, diğer bitiş noktası ikinci parçada olur.

c.

	Ziyaret Edilen Düğümler	Düğüm Sırası
Başlangıç		A
Adım 1	A	B C E
Adım 2	A B	C E D
Adım 3	A B C	E D
Adım 4	A B C E	D
Adım 5	A B C E D	F
Adım 6	A B C E D F	