Ayrık Matematik
(Ayrık İşlemsel Yapılar)

Fırat İsmailoğlu, PhD

Hafta 9:
Olasılık - I

Örnek Uzay (Sample Space)

Örnek uzay bir deneyin olabilecek tüm sonuçlarının kümesidir. S ile gösterilir.

ör. Deney bir bozuk para atılması. Olabilecek tüm sonuçlar: $S = \{Y, T\}$

ör. Deney iki bozuk para atılması. Olabilecek tüm sonuçlar: $S = \{YY, YT, TT, TY\}$

ör. Deney üç bozuk para atılması. Olabilecek tüm sonuçlar:

$$S = \{YYY, YYT, YTY, TYY, YTT, TYT, TTY, TTT\}$$

ör. Deney bir zar atılması. Olabilecek tüm sonuçlar: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

ör. Deney bir zar bir bozuk para atılması. Olabilecek tüm sonuçlar

$$S = \{1Y, 1T, 2Y, 2T, 3T, 3Y, 4T, 4Y, 5T, 5Y, 6T, 6Y\}$$

ör. Diyelim bir hava yagmurlu yada yagmursuz ve gunesli yada bulutlu olabilir. Bu durumda olabilecek tüm sonuçlar:

$$S = \left\{\begin{array}{c} yağmurlu\ güneşli, \\ yağmursuz\ güneşli, \\ yağmurlu\ bulutlu, \\ yağmursuz\ bulutlu \end{array}\right\}$$

Örnek Uzay (Sample Space)

(SAMPLE SPACE OF DRAWING A CARD)

2♣	2♦	2♥	2♠
3♣	3♦	3♥	3♠
4♣	4♦	4♥	4♠
5♣	5♦	5♥	5♠
6♣	6♦	6♥	6♠
7♣	7♦	7♥	7♠
8♣	8♦	8♥	8♠
9♣	9♦	9♥	9♠
T♣	T♦	T♥	T♠
J♣	J♦	J♥	J♠
Q♣	Q♦	Q♥	Q♠
K♣	K♦	K♥	K♠
A♣	A♦	A♥	A♠

Bir kart çekilmesi durumunda olabilecek tüm sonuçlar (örnek uzay)

Olay (Event)

Örnek uzayın bir alt kümesi.

ör. İki bozuk para atıldığında en az bir yazı gelmesi olayı $E=\{YY, YT, TY\}$

ör. İki zar atılıdığında toplamın çift olması olayı
$E=\{1\,1, 1\,3, 1\,5, 2\,2, 2\,4, 2\,6, 3\,1, 3\,3, 3\,5, 4\,2, 4\,4, 4\,6, 5\,1, 5\,3, 5\,5, 6\,2, 6\,4, 6\,6\}$

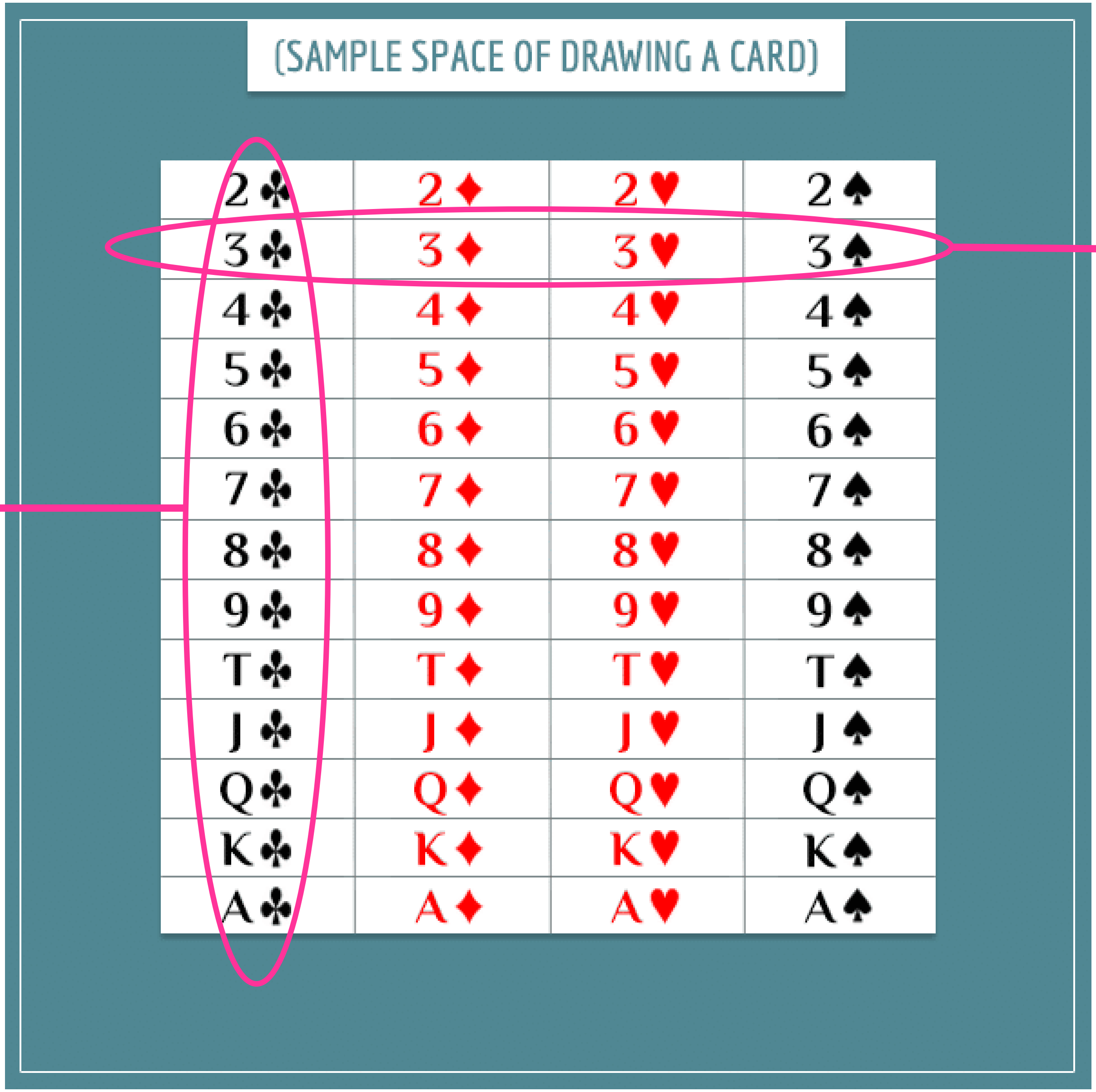
ör. Bir zar atıldığında çift ve asal gelmesi olayı $E=\{2\}$

ör. Havanın güneşli olması olayı $E=\{yağmurlu\ güneşli, yağmursuz\ güneşli\}$

ör.

Not: Bir olaydaki sonuçlar istenilen özelliği sağlar. Örneğin iki bozuk para atılma deneyinde en az bir yazı gelme olayında sonuçlar YY, YT, TY istenilen yazı gelme durumunu sağlar.

Olay (Event)


(SAMPLE SPACE OF DRAWING A CARD)

2♣	2♦	2♥	2♠
3♣	3♦	3♥	3♠
4♣	4♦	4♥	4♠
5♣	5♦	5♥	5♠
6♣	6♦	6♥	6♠
7♣	7♦	7♥	7♠
8♣	8♦	8♥	8♠
9♣	9♦	9♥	9♠
T♣	T♦	T♥	T♠
J♣	J♦	J♥	J♠
Q♣	Q♦	Q♥	Q♠
K♣	K♦	K♥	K♠
A♣	A♦	A♥	A♠

çekilen kartın 3 gelmesi olayı

çekilen kartın sinek gelmesi olayı

Olasılık (Probability)

Bir $E \subseteq S$ olayının olasılığı:

$$P(E) = \frac{|E|}{|S|}$$

$|E|$ → istenilen olaydaki tüm sonuçların sayısı

$|S|$ → olabilecek tüm sonuçların sayısı

ör. İki bozuk para atıldığında en az bir yazı gelmesi olasılığı nedir?

$E = \{YY, YT, TY\}$ ve $S = \{YY, YT, TT, TY\}$ iken $P(E) = \frac{3}{4}$

ör. İki zar atııdığında ikisinin aynı gelme olasılığı?

$E = \{1\,1, 2\,2, 3\,3, 4\,4, 5\,5, 6\,6\}$ olup $|E| = 6.$

S, yani olabilecek tüm sonuçların kümesinin eleman sayısı $6 \times 6 = 36$ (çarpma kuralıyla)

$$P(E) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

ör. Diyelimki 100 slotluk bir hash tablomuz ve 50 anahtarimiz var. Hash fonksiyonumuz tamamen rastlantisal olarak anahtarlari slotlara gönderiyor.

Bu durumda aynı slota 50 anahtarın gönderilme olasiligi ile 50 anahtarin 50 farkli slota gönderilme olasiliklarini karsilastiriniz.

Çözum:

Her bir anahtar icin 100 seçenek vardir. Çarpım kuraliyla 50 anahtar 100 slota 100^{50} farkli sekilde yerlestirilir. Bu, örnek uzayın eleman sayisidir.

Birinci durumda 50 anahtar $1.$ slota yada $2.$ slota, $\ldots$, yada $100.$ slota gönderilebilir. Bu durumda olay kümesi $E = \{1\,1 \ldots 1, 2\,2 \ldots 2, \ldots, 100\;100, \ldots, 100\}$ olup eleman sayısı 100 olur. Birinci durumun olma olasiligi $\frac{100}{100^{50}}$

Ikinci durumda birinci anahtar 100 farklı slota gidebilir. Ikinci anahtar birinci anahtarın gittigi slota gidemeyecegi icin 99 farklı slota gidebilir. Uçuncu anahtar 98 farklı slota gidebilir. Bu sekilde E olayının eleman sayısı $100 \times 99 \times \cdots \times 51.$

Ikinci durumun olma olasaililgi $\frac{100 \times 99 \times \cdots \times 51}{100^{50}}$ olup; ikinci durumun olasiligi yani her bir anahtarin farkli slotlara yerleştirilme olasiligi çok daha yüksektir.

Tamamlayıcı Olay

Bir E olayının S örnek uzayindaki tamamlayıcı olayı $S - E$'dir. Kendisinin olasiligi ile beraber tamamlayicisinin olasiliklari toplami her zaman 1 olur.

$$P(E) + P(S - E) = 1$$
$$P(E) = 1 - P(S - E)$$

Dolayısıyla bir olayin olasiligini bilirsek tamalayıcı olayının da olasligini biliriz.

ör. E olayı 5 defa atılan bir bozuk para deneyinde en az 1 defa yazı gelme olayı olsun. Bu olayın tamalayıcısı $S - E = \{TTTTT\}$ (yani 5 defa atılan bir bozuk paranın hiç yazı gelmemesi) .

Olabilecek tüm sonuçların sayısı $|S| = 32$ (neden ?)

$P(S - E) = \frac{1}{32}$ (5 defa atılan bir bozuk paranin hiç yazı gelmeme olasılığı)

$P(E) = 1 - \frac{1}{32} = \frac{31}{32}$ (en az 1 defa yazı gelme olasiligi) ör. 20 slotluk bir hash tablosunda random bir hash fonksiyonu tarafindan yerlestirilen 10 anahtarın en az ikisinin bir slotta olma olasiligi nedir? (çakışma olma olasiliği nedir?)

Çözüm.

E olayı en az iki anahtarın ayni slotta olma olayi olsun.

$S - E$ her anahtarin farklı slotta yer almasi olayi olur. Bunun olasiligi

$$P(S-E) = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{20^{10}} = 0.0655$$

Şu halde E olayının olaslığı $P(E) = 1 - 0.0655 = 0.9345.$

(Yani bir slota en az iki anahtarın yerleştirilmesi çok olasıdır.)

Ana fikir: Eğer olması çok muhtemel bir olayın olasılığı soruluyorsa, genelde bu olayın değil bu olayın tersi olan (tamamlayıcısı olan) olayın olasılığı hesaplanarak 1'den çıkarılır. Çunku bu durumda tersinin olma olaslığı düşük olduğundan olasılığının hesaplnmasi daha kolay olur.

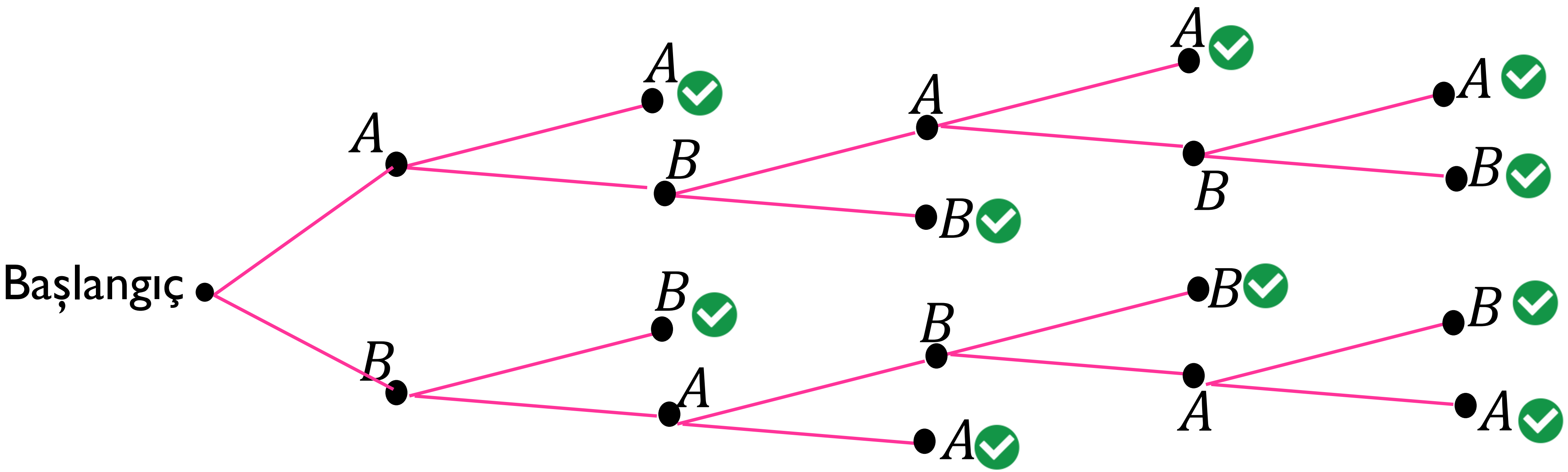
Olasılık Ağaçları

Ağaç yapısı, olayların sıra ile olduğu durumlarda bütün olasılıkların sistematik kaydını tutmak için faydali bir araçtır.

ör. Bir turnuvada A ve B takımları maç yapıyor. Turnuvaya bir takımın kazanabilmesi icin, ya iki maçı üst üste kazanması yada herhangi üç maçı kazanmasi gerekmetedir.

i. Bu turnuvada oynanabilecek maksimum maç sayısı kaç olur?

ii. Turnuvanin kazananina karar vermek icin 5 maç oynanma olasiligi nedir? (turnuvayı kazanmanın her yolunun eşit derecede muhtemel olduğu varsayılacak)



i. Bu şekilde en fazla 5 maç yapılabilir.

ii. Turnuvayı kazanmanin 10 farklı yolu vardır. Bunlarin 4'unde 5 maç yapilarak kazanilir. O halde 5 maç oynanma olasiligi $\frac{4}{10} = 0.4$ olur.

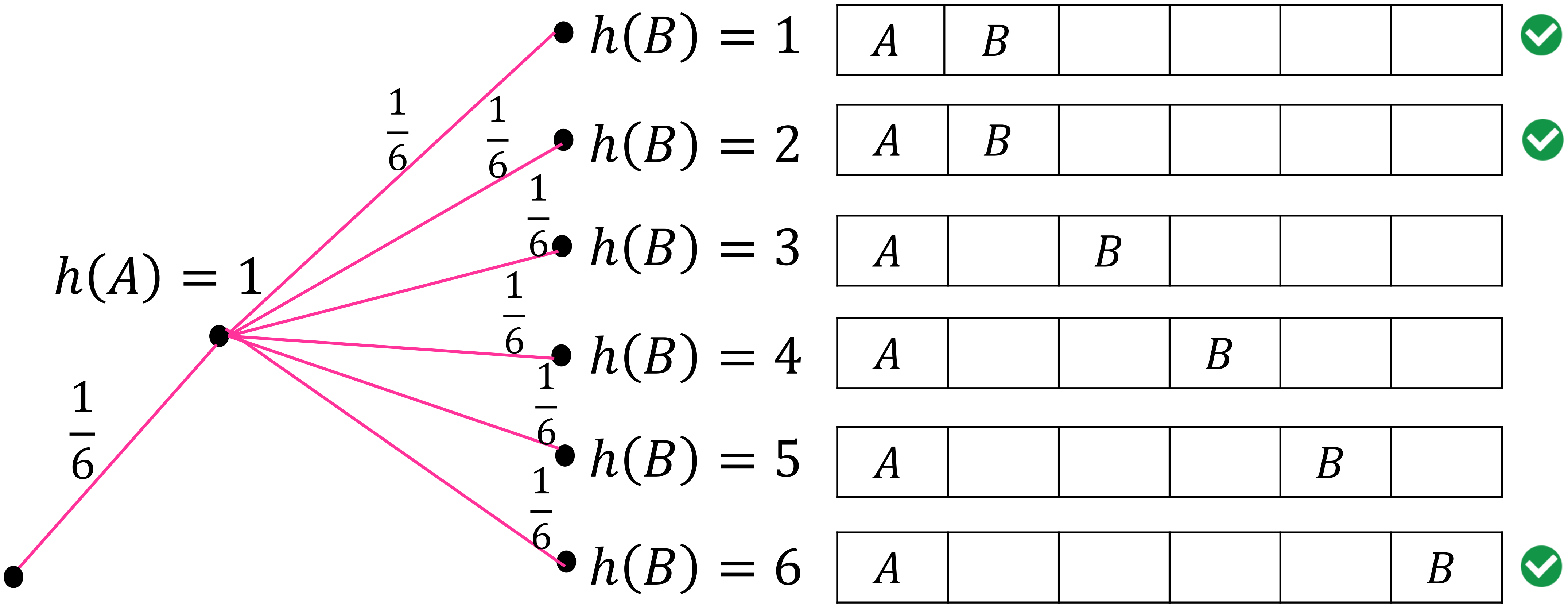
ör. 6 slotluk bir hash tablosuna rastgele olarak 2 anahtar yerleştiriliyor. Çakışma durumunda doğrusal araştırma (linear probing) yapılıyorsa 2 anahtarın ardışık slotlara yerleştirilme olasılığı nedir?

Çözüm.

Varsayalımki anahtarlar A ve B olsun; ve hashing fonksiyonu

$h: \{A, B\} \rightarrow \{1,2,3,4,5,6\}$ olsun.

Doğrusal araştırmada en soldan başlayarak yerleştirme yapilir. Herhangi bir slotun dolu olma durumunda bir sağa yerleştirme yapilir.



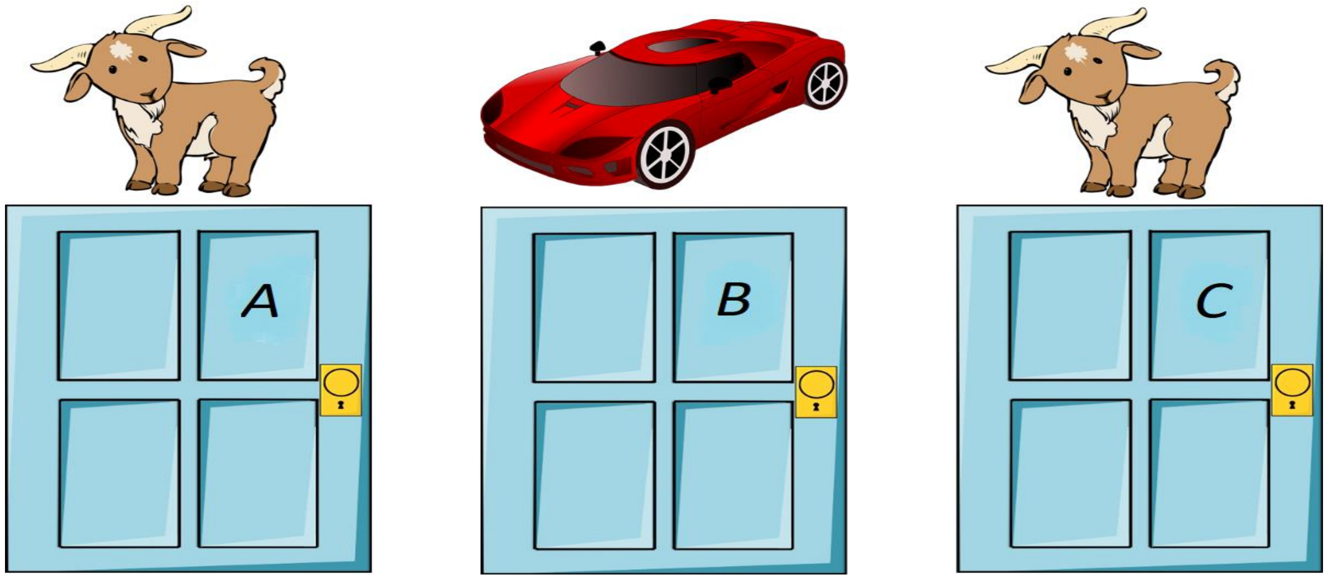
Yukarida yalnizca $h(A) = 1$ için (yani A'nın 1. slota yerleştirildigi durum icin) olabilecek B'nin yerlestirilme durumlari verilmistir. Oluşan 6 durumun 3'unde A ve B ardışıktır.

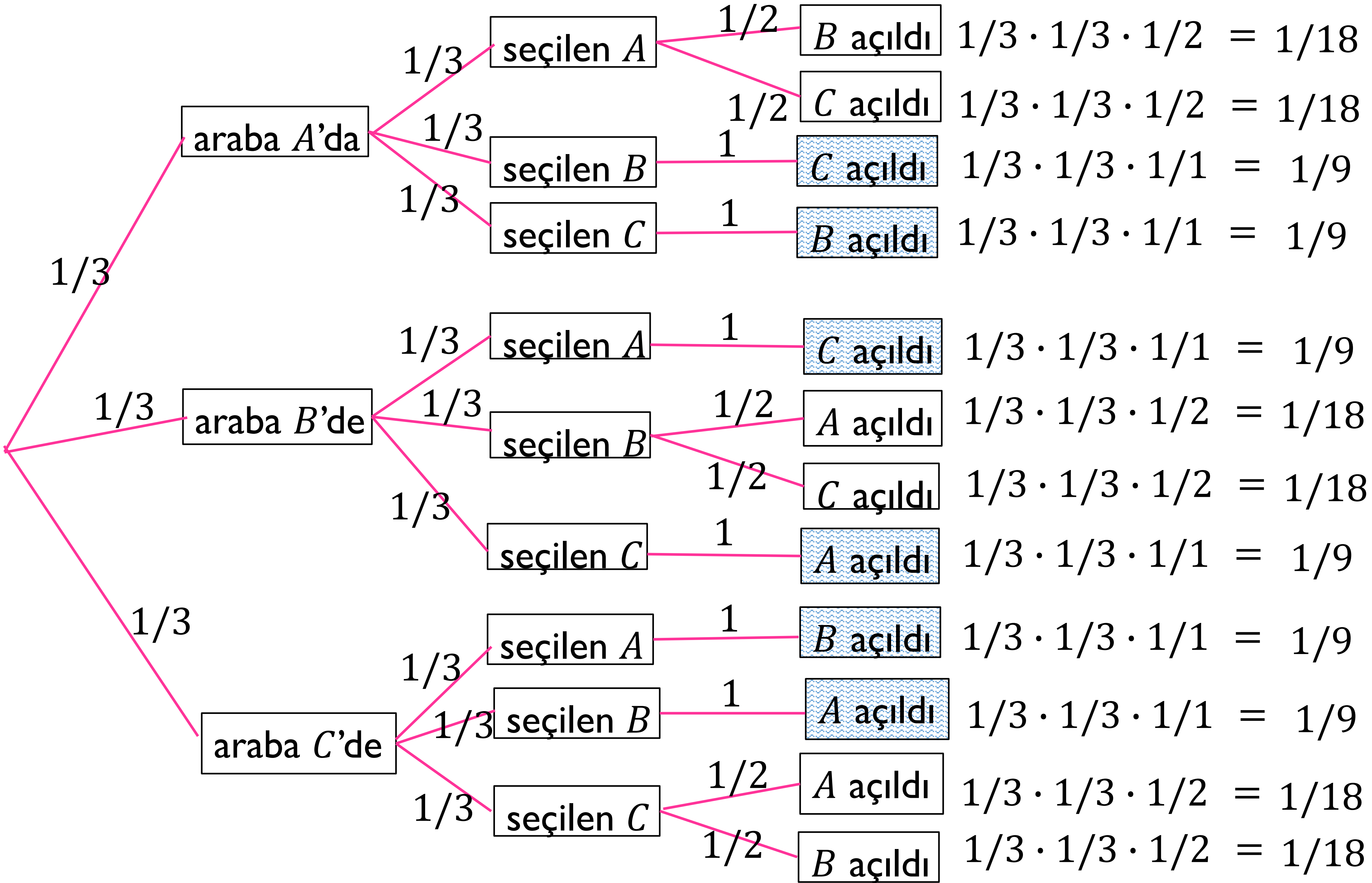
A, 1.slotta ve B'nin A'nın ardışığı olma olasılığı $\frac{1}{6} \cdot 3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$

Ayni sekilde agacin diger dallari cizilirse A'nin 2. slotta, A'nin 3. slotta, …, A'nin 6. slotta olma durumlarinda her defasinda 3 defa B'nin, A'nin ardisigi oldugu görulur. Sonuç olarak aranilan olasilik bu durumlarin her birinde aynı şekilde $\frac{1}{12}$ olur.

Aradiğimiz olaslik : $\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}=\frac{1}{2}$.

ör (Monty Hall Problemi). Diyelimki bir yarışmada üç kapıdan birini seçmeniz isteniyor. Bu kapılarin ikisinde keçi, birinde ise araba var. Bir kapıyı seçiyorsunuz. Sunucu seçmediğiniz kapılardan birini açıp size keçilerden birini gösteriyor ve isterseniz seçiminizi değiştirebilirsiniz diyor. Bu durumda seçiminizi değiştirmeli misiniz?




1/3
araba A'da
1/3
seçilen A
1/2
B açıldı
1/3 · 1/3 · 1/2 = 1/18
1/2
C açıldı
1/3 · 1/3 · 1/2 = 1/18
1/3
seçilen B
1
C açıldı
1/3 · 1/3 · 1/1 = 1/9
1/3
seçilen C
1
B açıldı
1/3 · 1/3 · 1/1 = 1/9
1/3
araba B'de
1/3
seçilen A
1
C açıldı
1/3 · 1/3 · 1/1 = 1/9
1/3
seçilen B
1/2
A açıldı
1/3 · 1/3 · 1/2 = 1/18
1/2
C açıldı
1/3 · 1/3 · 1/2 = 1/18
1/3
seçilen C
1
A açıldı
1/3 · 1/3 · 1/1 = 1/9
1/3
araba C'de
1/3
seçilen A
1
B açıldı
1/3 · 1/3 · 1/1 = 1/9
1/3
seçilen B
1
A açıldı
1/3 · 1/3 · 1/1 = 1/9
1/3
seçilen C
1/2
A açıldı
1/3 · 1/3 · 1/2 = 1/18
1/2
B açıldı
1/3 · 1/3 · 1/2 = 1/18

Mavi ile taranmış durumlarda oyuncu seçtiği kapiyi degistirirse arabayi olur. Bu durumlar 6 tanedir ve herbirinin gerçekleşme olasılığı $\frac{1}{9}$ dur.

Seçilen kapı değiştrilince kazanma olasiligi $6 \cdot \frac{1}{9} = \frac{2}{3}$

Seçilen kapı değiştrilince kazanmama olasiligi $1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

Ikinci bir yol olarak seçilen kapı değiştrilince kazanmama olasiligini su sekilde bulabiliriz:

Her birinin olasiligi $\frac{1}{18}$ olan 6 durumda oyuncu seçtiği kapiyi degistirmemelidir.

Bu durumlarin olasiligi $6 \cdot \frac{1}{18} = \frac{1}{3}$

Sonuç olarak oyuncu seçtiği kapıyı değiştirmelidir.