Ayrık Matematik
(Ayrık İşlemsel Yapılar)

Fırat İsmailoğlu, PhD

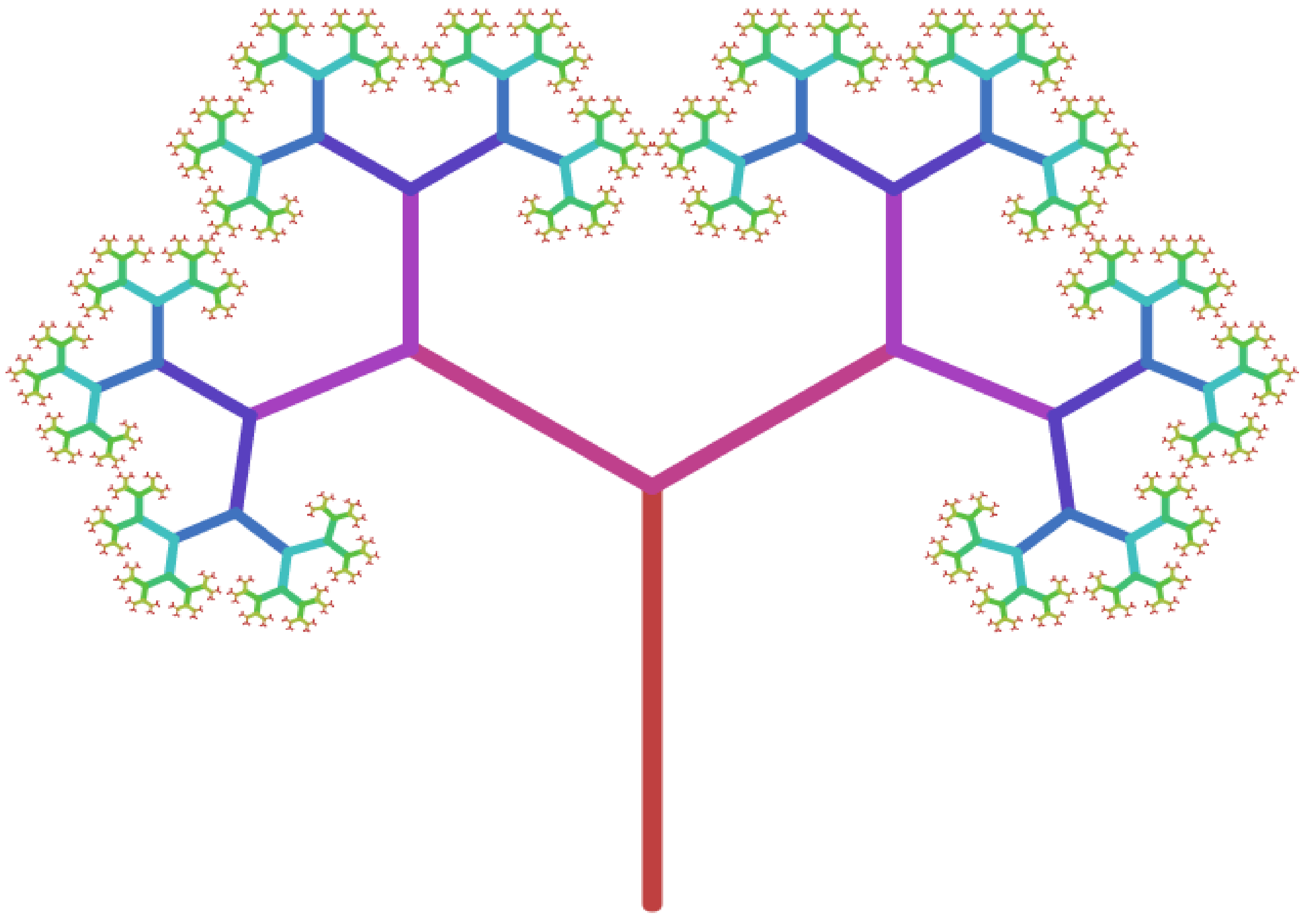
Hafta 5:
Rekürsiyon

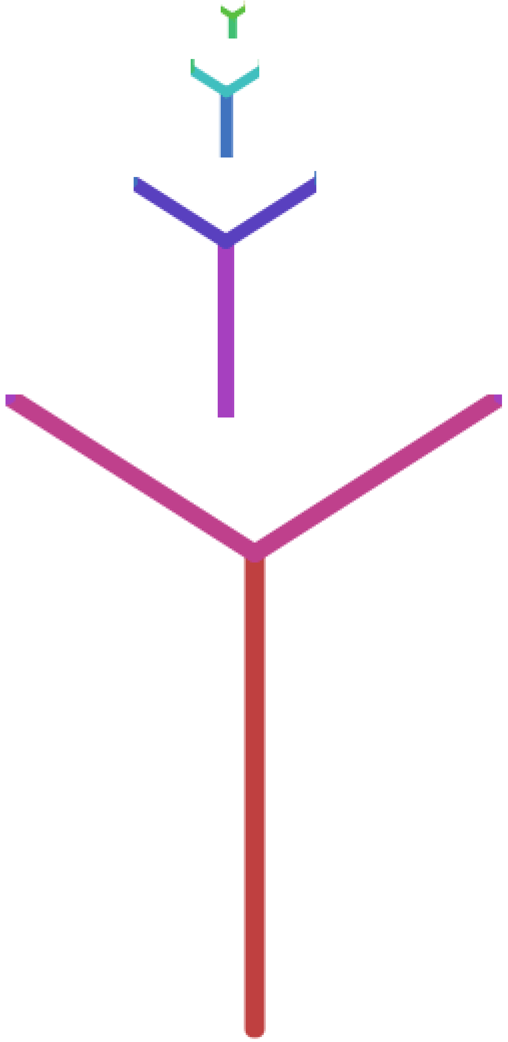
Hafta 5
Plan

1. Rekürsiyon
2. Rekürsif Olarak Tanimlanmiş Fonksiyon
3. Hanoi Kulesi

Rekürsiyon (Özyineleme)(Kendini Çağırma)

Bazen bir objeyi açıkca ifade etmek güçtür. Bunun yerine *objeyi kendi cinsinden daha küçük parçalarla* ifade etmek daha kolay olabilir. Bu kendi cinsinden ifade etme surecine rekürsiyon denir.





Rekürsif Olarak Tanımlanmış Fonksiyon

A bir küme olsun. $f : \mathbb{N} \to A$ fonksiyonunun rekursif olarak tanimlanmasi icin:

1. Temel Adım (base step): f, 0 da tanimli olmalidir.
2. Rekursif Adım (recursive step): $n > 0$, $f(n)$ için f'in n'den kucuk sayilardaki degerleri $(f(n-1), f(n-2), f(n-3), \ldots)$ kullanilarak bir kural ile verilebilmelidir.

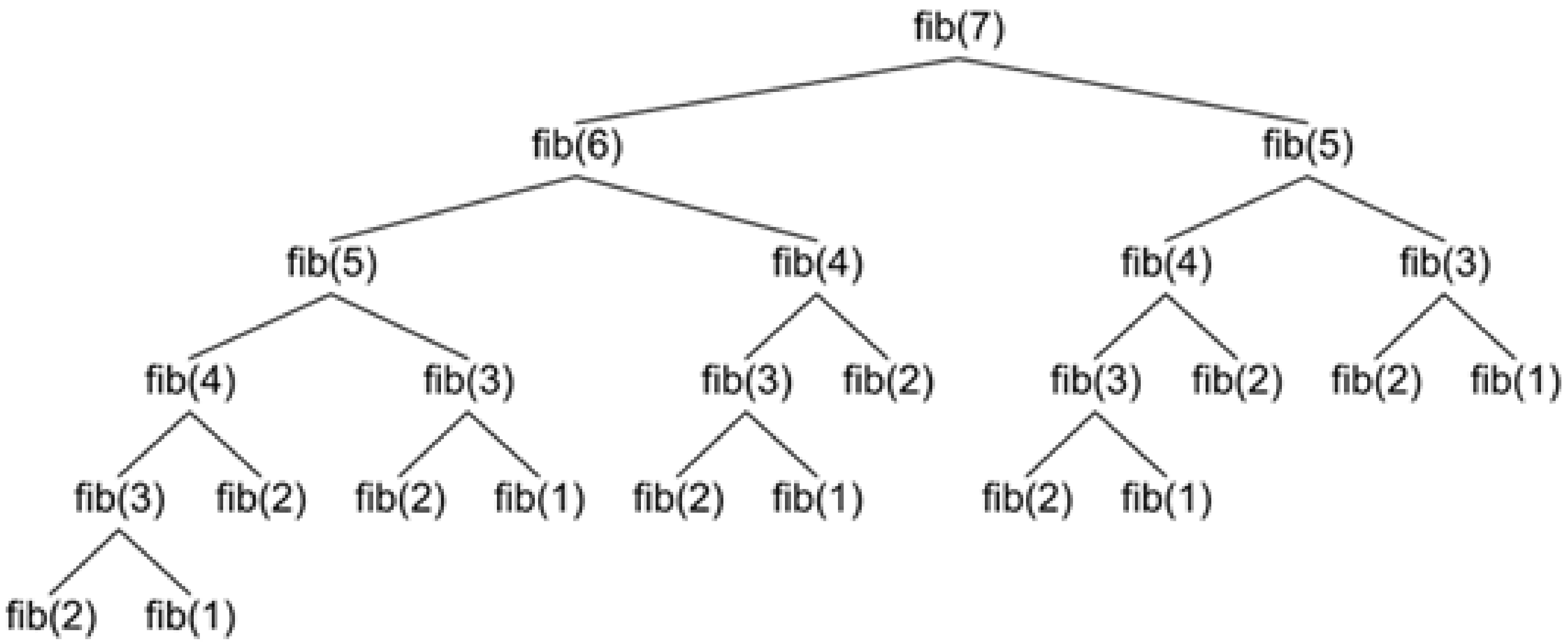
ör. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. $f(0) = 3$ ve $f(n) = 2 \cdot f(n-1) + 3$.

ör. Faktoriyel fonksiyonu: $! : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. $!(0) = 1, !(n) = n \cdot !(n-1)$.

ör. Fibonacci fonksiyonu: $fib: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

$fib(0) = 1, fib(1) = 1,$
$fib(n) = fib(n-1) + fib(n-2)$

Rekursiyon ana strateji: Verilen problemi direkt cozmek yerine bu problemin daha kucuk bir ornegini coz. Daha sonra bu cozumu orjinal problemin cozumunde kullan.



Dikkat edilirse rekursif fonksiyonda bir deger hesaplaniriken bazi degerler birden fazla kez hesaplaniyor (ornegin yukarida $fib(3)$ 5 defa hesaplaniyor). Bu da hesaplamanin yavas yapilmasina neden olur.

ör. 1000 TL %12 birleşik faizden bankaya yatırılırsa n. yılın sonunda elde edilen toplam para ne kadar olur?

$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(n)$, 1000 TL'nin %12 birleşik faizle bankaya yatirilmasindan n. yılın sonunda elde edilen geliri göstersin.

$f(0) = 1000$

$f(1) = f(0) + (0.12) \cdot f(0) = (1.12) \cdot f(0)$

$f(2) = f(1) + (0.12) \cdot f(1) = (1.12) \cdot f(1)$

… …

$f(n) = (1.12) \cdot f(n-1)$

```
birlesikFaiz(n,anaPara,faiz){
if n==0
   return anaPara
else
   return (1+faiz)*birlesikFaiz(n-1)}
```

Not. Burada buldugumuz rekursif fonksiyonu kullanarak f'in genel formunu (rekursif olamayan açik ifadesini) bulabiliriz.

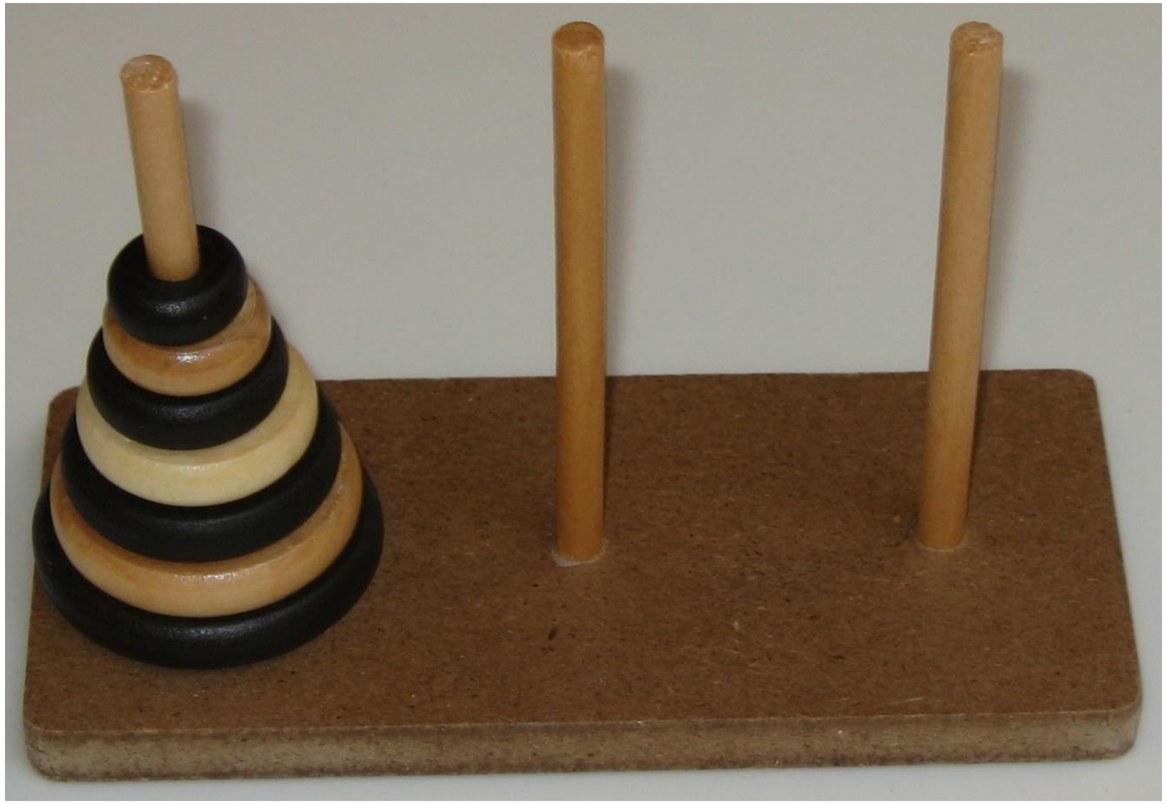
$$
\begin{aligned}
f(n) &= (1.12) \cdot f(n-1) \\
&= (1.12) \cdot (1.12) \cdot f(n-2) \text{ (} n \text{ yerine } n-1 \text{ koyduk)} \\
&= (1.12) \cdot (1.12) \cdot (1.12) \cdot f(n-3) \\
&\ldots \\
&= (1.12)^k \cdot f(n-k) \ (0 \le k \le n)
\end{aligned}
$$

$k = n$ icin $f(n) = (1.12)^n \cdot f(0) = (1.12)^n \cdot 1000$

ör (Hanoi Kuleleri Problemi). Hanoi Kuleleri probleminde 3 tane çubuk ve bu çubuklarin birinde aşağıdan yukarı büyükten küçüğe doğru dizilmiş n tane halka bulunur. Amaç, bu n halkayı boş olan çubuklardan birine yine büyükten küçüğe doğru dizmektir. İki kural vardir:

1. Her adimda çubuğun yalniz en ustteki halkasi hareket ettirilir.
2. Bir halkanin üzerine kendinden daha büyük bir halka konulamaz.

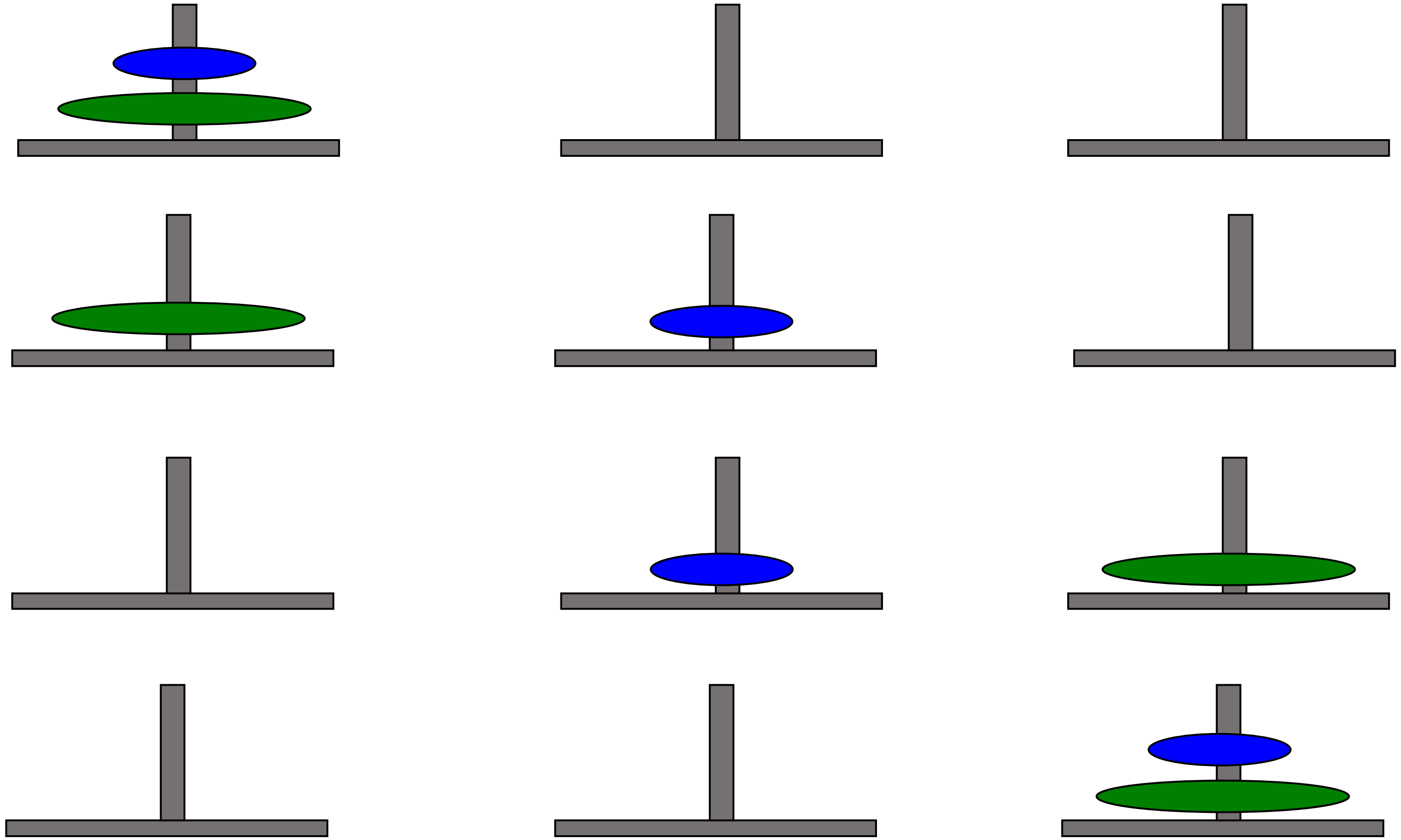
Soru: n halkayi bir çubuktan diğerine geçirmek icin gereken minimum adim sayisi kaçtir?



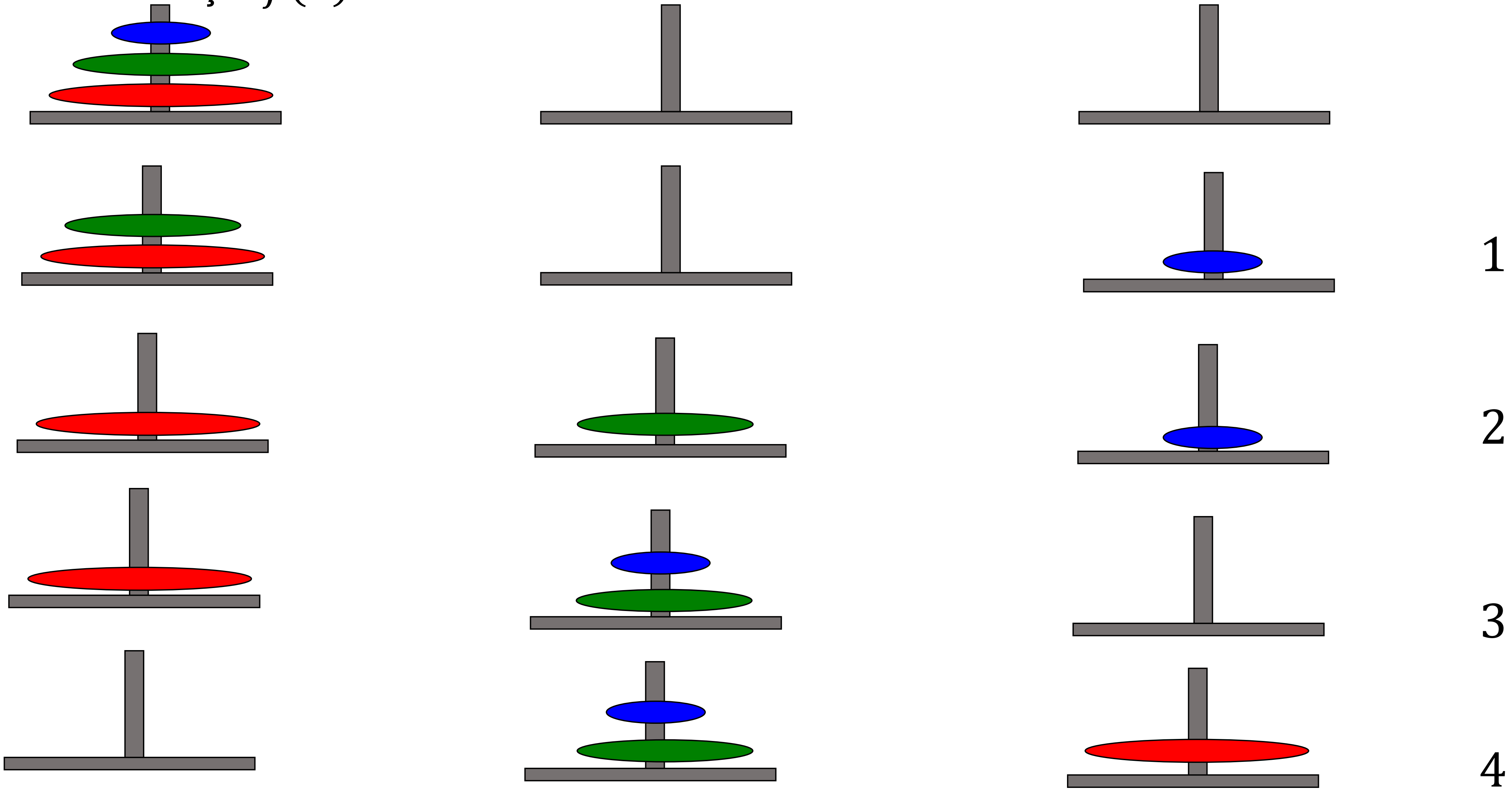
$f : \mathbb{Z}^{\geq 1} \rightarrow \mathbb{Z}^{\geq 1}$, $f(n), n$ tane halkanin bir cubuktan digerine geçmesi için gereken minimum adim sayisini gostersin.

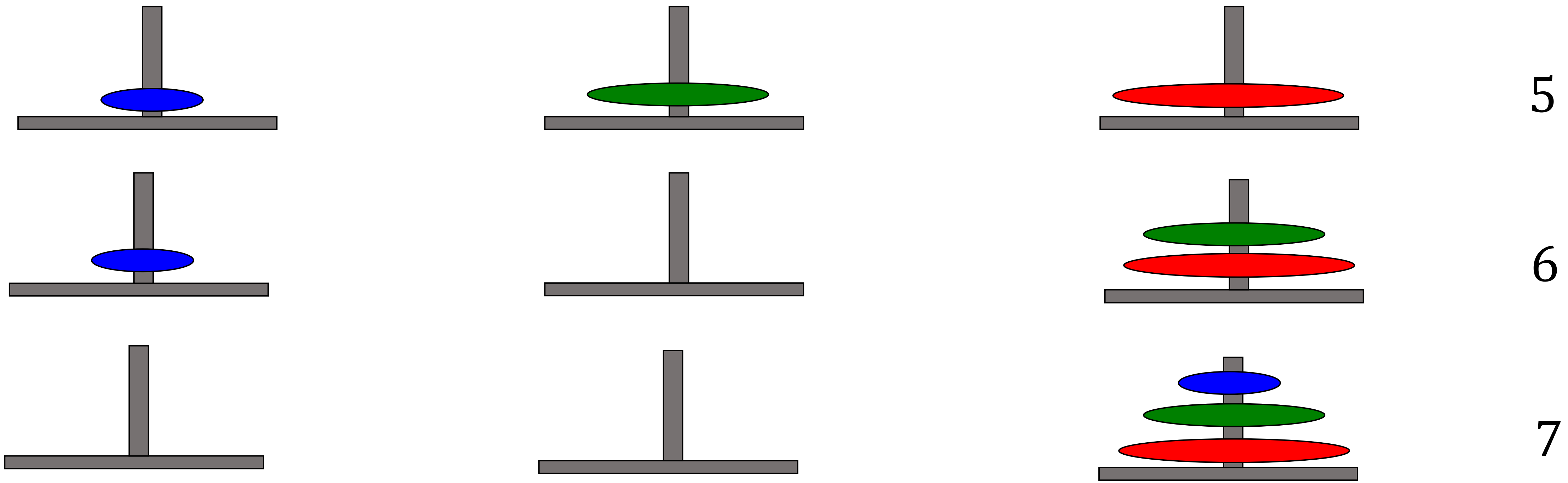
$n = 1$ için $f(n) = 1$ (bir disk bir defada diger cubuga gecer)

$n = 2$ için $f(n) = 3$

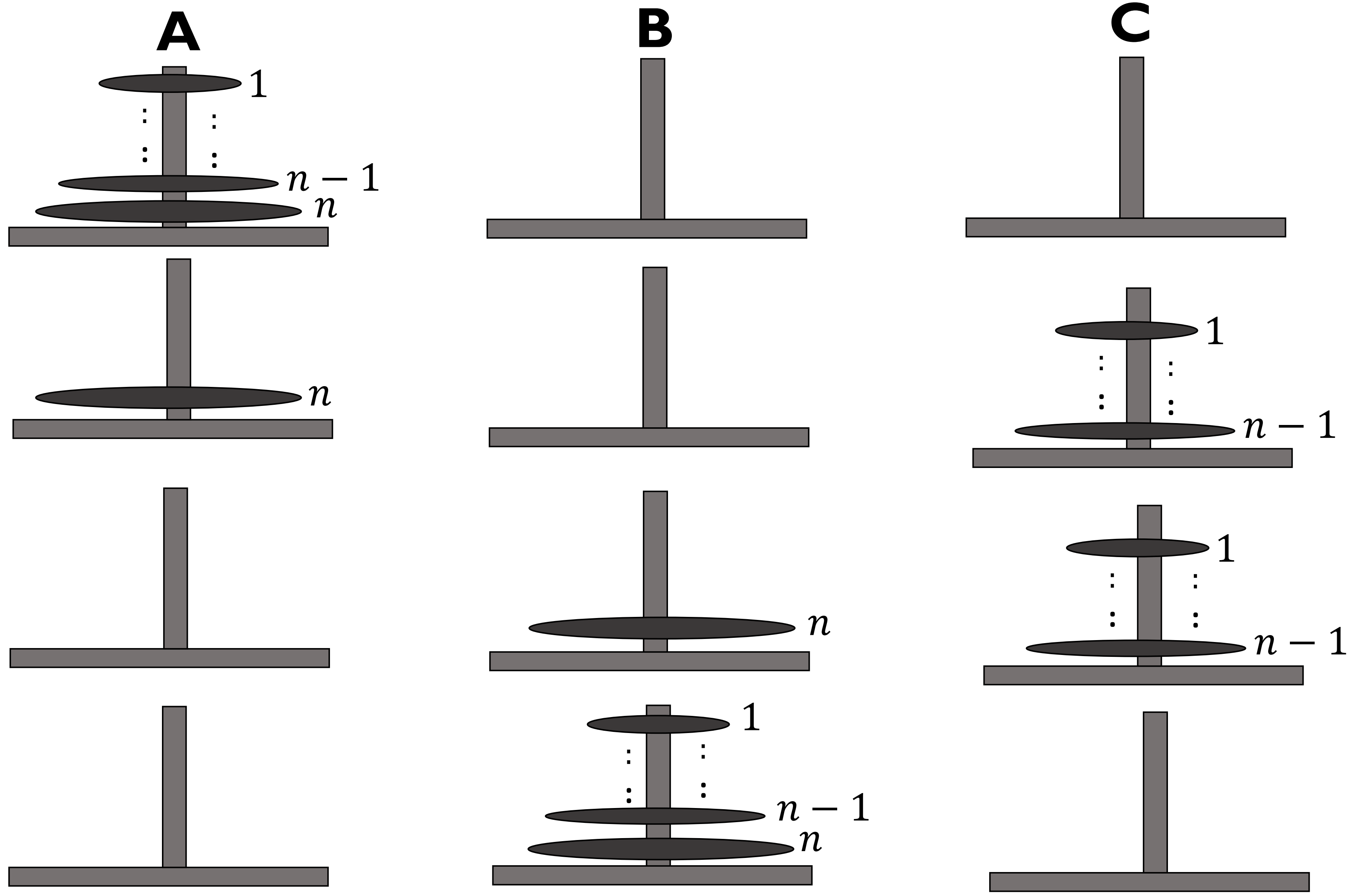


$n = 3$ için $f(n) = 7$





$n \geq 4$ disk için, 3 disk icin yaptigimiz yukarida gosterilen stratejiyi kullanarak rekursif olarak asagidaki sekilde dizebiliriz.



Gereken adım sayısı:

$f(n-1)$

1

$f(n-1)$

Toplam: $2 \cdot f(n-1) + 1$

Sonuc olarak $n \geq 4$ için $f(n) = 2 \cdot f(n-1) + 1$ olarak bulduk. Fakat örnegin 64 disklik bir kule icin adim sayisi olan $f(64)$'ü hesaplamak bu formul ile oldukca yavastir.

(Yavaşılik rekursif hesaplamalarin ortak dezavantajidir!)

Buldugumuz $f(n) = 2 \cdot f(n-1) + 1$ eşitligini kullanarak $f(n)$ için (rekursif olmayan) genel bir formul bulalim. Bunun icin n'e biraz deger vererek n ile $f(n)$ araindaki iliskiyi tahmin etmeye calisalim.

n	$f(n)$
1	1
2	3
3	7
4	15
5	31
6	63

Bu tablodan gorunuyorki $f(n) = 2^n - 1$ *olabilir*.

$f(n) = 2^n - 1$ esitligini matematiksel tumevarimla kanitlayalim.

temel durum: $n = 1$ icin $f(1) = 1$ (tablodan)

tumevarimsal durum: $n > 1$ için $f(n-1)$ dogru olsun. Bu durumda $f(n-1) = 2^{n-1} - 1$.

$$\begin{aligned} f(n) &= 2 \cdot f(n-1) + 1 \\ &= 2 \cdot (2^{n-1} - 1) + 1 \\ &= 2^n - 1 \end{aligned}$$

olup $f(n) = 2^n - 1$ esitligi dogru olur.

ör. Bir çocuk uyuyamadi, annesi ona uyuyamayan kucuk kurbaganin hikayesini anlatti.

Bu hikayede kurbaganin annesi kurbagaya uyuyamayan kucuk ayinin hikayesini anlatiyordu.

Bu hikayade ayinin annesi ayiya uyuyamayan kucuk tilkinin hikayesini anlatiyordu....

Kucuk ayi uyudu.

Kucuk kurbaga uyudu.

Çocuk uyudu.