Ayrık Matematik
(Ayrık İşlemsel Yapılar)

Fırat İsmailoğlu, PhD

Hafta 8:
Sayma

Hafta 8
Plan

1. Saymanın Kuralları
2. Ekleme - Çıkarma
3. Geneleştirilmiş Çarpım Kuralı
4. Permütasyon
5. Güvercin Yuvası Prensibi
6. Kombinasyon

Giriş

Saymanın basit kuralları ile birçok karışık problem çözülebilir:

-Türkiye'de mumkun olan tüm telefon numaralari sayisi,

-bir sistemde uretilebilecek tum şifrelerin sayisi,

-bir yarışın kaç farkli sekilde bitirilebileceginin sayisi,

-bir algoritmanin görevini yapmasi icin gereken toplam adım sayısı.

- 600 milletvekilinin kac farkli sekilde secilebilecegi

Bunlara ek olarak, bilgisayar bilimlerindeki *kaba kuvvet (brute force)* algoritmalar bir problemi çözerken olabilecek bütün çözümleri inceler; bunlar içindeki en iyi çözumu ortaya çikarır. Bu bölümde görecegimiz sayma kurallarını bir problemde mumkun olan tum çözumlerin sayısını hesaplarken kullanabilecegiz. Böylece verilen bir problemde kaba kuvvet tipinde bir algoritma kullanmanin makul (feasible) olup olmadigina karar verebilecegiz.

Saymanın Kuralları

1. Toplama Kuralı

A ve B iki ayrık kume olsun ($A \cap B = \emptyset$). Bu durumda A ve B kümelerinin birleşiminin eleman sayısı:

$$|A \cup B| = |A| + |B|$$

olur. Genelleştirirsek:

$A_1, A_2, \dots, A_n$; n tane ayrık küme olsun (yani herhangi ikisinin kesişimi boş küme olsun). Bu durumda bu kümelerinin birleşiminin eleman sayısı:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_n|$$

ör. Bir sınıftaki öğrencilerin 15'i Sivas'lı, 10'u Kayseri'li ve 5'i Adana'lıdır. Bu sınıfta kaç öğrenci vardır?

A_1: Sivas'lı öğrenciler kümesi, A_2: Kayseri'li öğrenciler kümesi A_3:Adana'lı öğrenciler kümesi olsun. Herhangi iki kümenin kesişimi boş kümedir.

Sivas'lı, Kayseri'li ve Adana'lı öğrencilerden meydana gelen sınıfın mevcudu:

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| = 15 + 10 + 5 = 30$$

ör. İki tane 1 içeren kaç tane 5 bitlik dizi vardır? $(10100, 00011, 01001, \ldots)$

Çözüm: Bu diziler iki tane 1 içerecek. Bu dizilerdeki ikinci 1 bit , ikinci, üçüncü, dördüncü yada besinci pozisyonda (yerde) olabilir.

A_2 kümesi, ikinci 1 bitinin ikinci pozisyonda olduğu 5 bitlik dizilerin kümesi olsun. Eger ikinci 1 biti ikinci pozisyonda ise, birinci 1 biti birinci pozisyondadır. Su halde bu kümenin tek bir elemani vardir: 11000.

$A_2 = \{11000\}$

A_3 kümesi, ikinci 1 bitinin üçüncü pozisyonda olduğu 5 bitlik dizilerin kümesi olsun:

		1		

ikinci 1

birinci 1 bu iki yerden birindedir

1	0	1	0	0
0	1	1	0	0

A_3'ün elemanları

A_4 kümesi, ikinci 1 bitinin dördüncü pozisyonda olduğu 5 bitlik dizilerin kümesi olsun:

			1	

ikinci 1

birinci 1 bu üç yerden birindedir

1	0	0	1	0
0	1	0	1	0
0	0	1	1	0

A_4'ün elemanları

A_5 kümesi, ikinci 1 bitinin beşinci pozisyonda olduğu 5 bitlik dizilerin kümesi olsun. A_5'in eleman sayisi 4'tür.

İki tane 1 içeren kaç tane 5 bitlik dizi sayısı:

$$|A_2| + |A_3| + |A_4| + |A_5| = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$$

2. Çarpım Kuralı

Birinci elemanı A kümesinden, ikinci elemani B kümesinden alınarak oluşturulan ikililerin sayısı: $|A| \times |B|$ dir.

ör. Yemek kumesi $A = \{kofte, doner, pide, lahmacun\}$,

İçecek kümesi $B = \{kola, fanta, ayran\}$

olsun. Bir yemek ve bir içecekten oluşan menü kaç farklı şekilde secilir?

Çözüm: Yemek ve icecekten olusan ikililerin toplam sayısı: $|A| \times |B| = 4 \times 3 = 12.$

Genelleştirirsek; $A_1, A_2, \dots, A_n$ n farklı küme olsun. Birinci elemanı A_1'den, ikinci elemanı A_2'den,.... alınarak oluşturulabilecek n elamanlı dizilerin sayısı:

$$|A_1| \times |A_2| \times \cdots \times |A_n|$$

dir.

ör. Yukarıdaki örnege ek olarak bir de $C = \{puding, baklava\}$ tatlı kümesi olsun. Bu durumda bir yemekten, bir içecekten ve bir tatlidan oluşan menü kaç farklı oluşturulabilir?

Çözüm: Menü sayısı: $|A| \times |B| \times |C| = 4 \times 3 \times 2 = 24.$

ör. URL kısaltma servisi *bit.ly*, uzun URL adreslerini sıkıştırarak 6 karaktere indirir. Herbir karakter 0-9 arası bir rakam; a,...z arası 26 küçük harf ve A,...Z arası 26 büyük harften biri olabilir. Bu sekilde üretilebilecek 6 karakter uzunlugundaki kısaltma sayısı kaç tanedir?

Çözüm:

Her karakter $\{0, \dots, 9\}, \{a, \dots, z\}$ ve $\{A, \dots, Z\}$ ayrık kümelerinden birine ait olmalidir. Bu yüzden her karakter bu kümelerin birleşim kumesinin:

$$\{0, \dots, 9\} \cup \{a, \dots, z\} \cup \{A, \dots, Z\}$$

elamanlarından biri olmalidir. Toplam kurali kullanarak birlesim kumesinin eleman sayısı 62 bulunur.

6 karakterin her biri için 62 farkli seçim vardır. Çarpım kuralı ile oluşturulabilecek toplam seçim sayısı:

$$62 \times 62 \times 62 \times 62 \times 62 \times 62 = 62^6 = 56.800.235.584$$

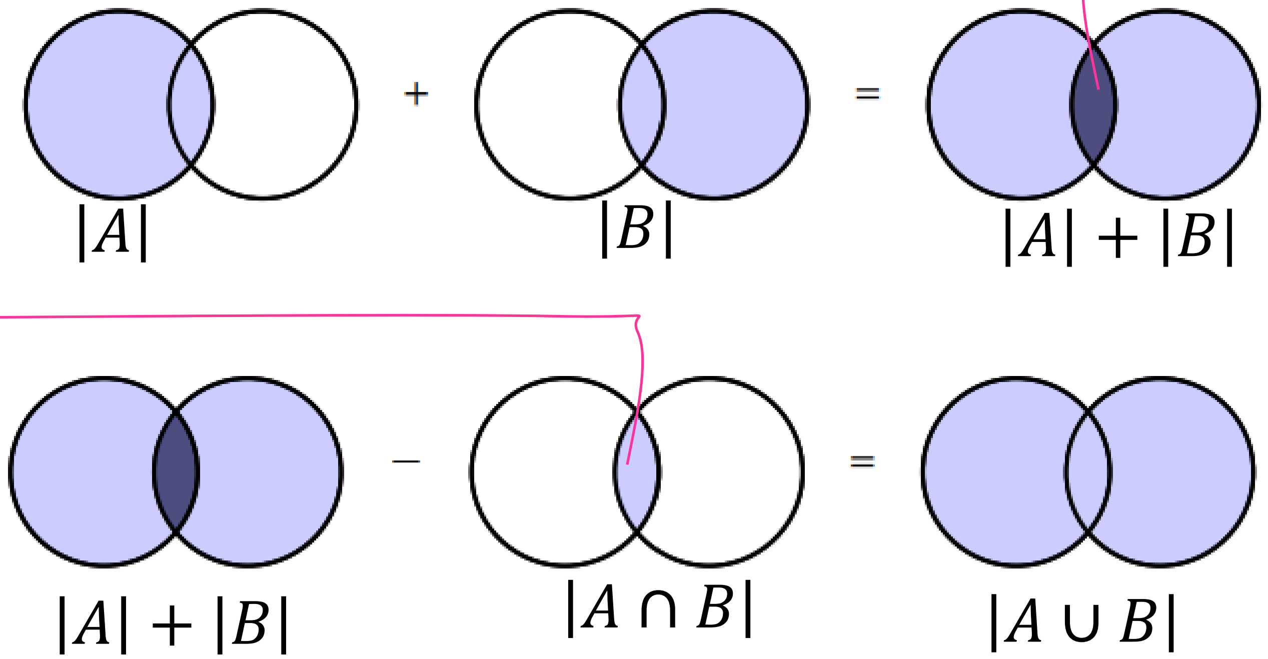
Ekleme – Çıkarma

Daha önce gördüğümüz toplama kuralinda birlesimi olusturan kumeler ayrıktı. Eger kumeler ayrik degilse (en az 1 ortak eleman varsa) bu kumelerin birlesminin eleman sayisini bulmak için 'ekleme-çıkarma' yapılır. Buna göre kümeler ayrıkmışçasına eleman sayıları toplanır, daha sonra iki defa sayılmış olan ortak elemanlar çıkarılır.

A ve B iki küme olsun. $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

birleşimi 2 defa saydık!

2 defa saydığımız yeri çıkartıyoruz!



Ekleme-çıkarma'yı '*önce say sonra özür dile*' gibi düşünebiliriz. $A \cup B$ 'nin eleman sayisini sayarken önce sayariz, daha sonra iki defa saydigimiz elemanlar için özür dileriz, bu elemanlari çikartiriz.

ör. Bir banka 4 haneli kart şifreleri için ilk üç ve son üç hanelerinin aynı rakam olmaması şartını koşuyor (0777 yada 5551 olamaz). Bu şekilde bu bankanın kabul etmeyeceği kaç tane şifre oluşturulabilir?

Çözüm.

A kümesi üç defa tekrar eden rakamla başlayan şifrelerin kümesi olsun ($5551 \in A$). Üç defa tekrar eden rakam için 10 farkli seçenek vardır $(0,1,2...)$. Geriye kalan son hane için de

10 farkli seçenek vardır. O halde çarpim kurali geregi $10 \times 10 = 100$ tane elemani vardır

A kümesinin.

B kümesi üç defa tekrar eden rakamla biten şifrelerin kümesi olsun ($0777 \in B$). Benzer şekilde B'nin eleman sayisi da 100 olur.

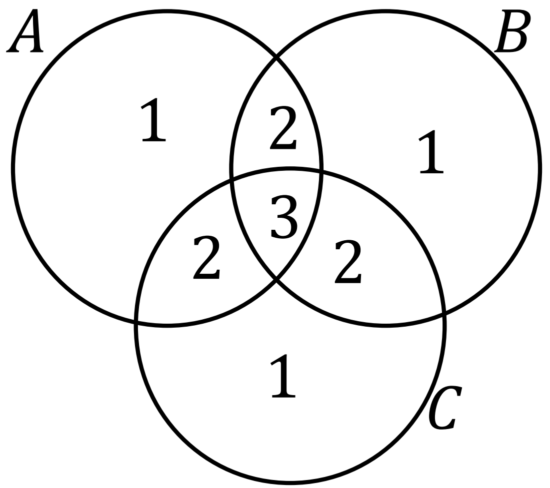
$$A \cap B = (0000, 1111, \dots, 999)$$

ve $|A \cap B| = 100.$

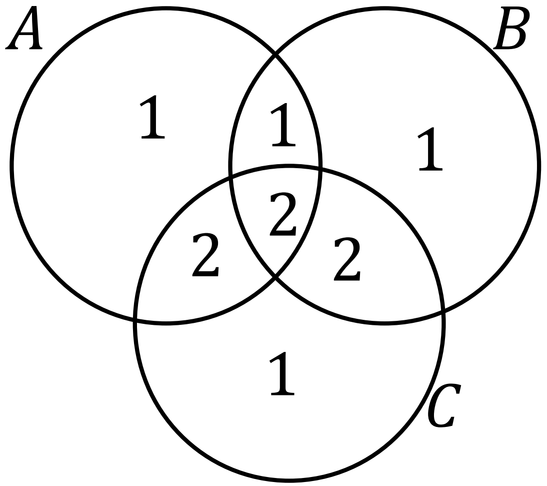
$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 100 + 100 - 10 = 190.$$

Üç Küme için Eksiltme-Çıkarma

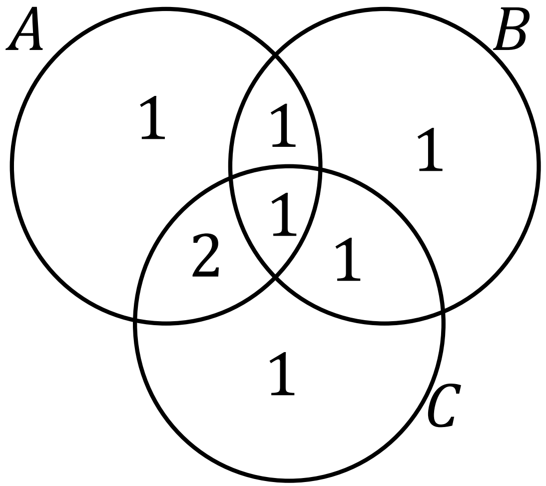
$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|$$



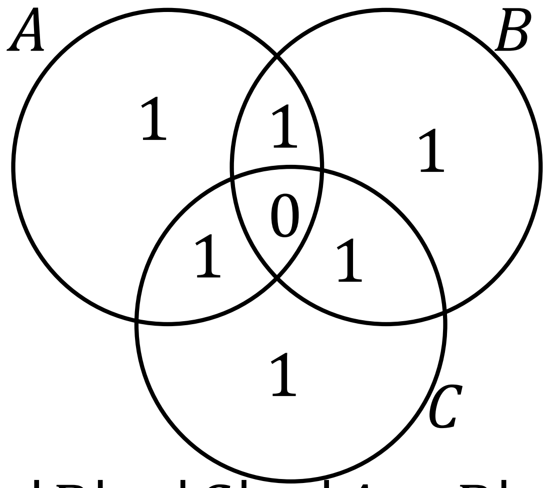
$|A| + |B| + |C|$



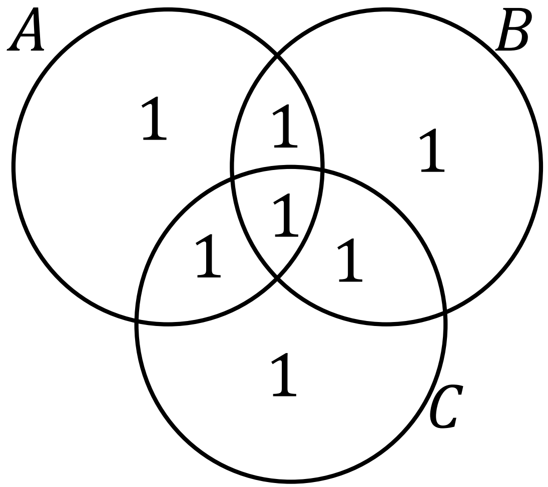
$|A| + |B| + |C| - |A \cap B|$



$|A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C|$



$|A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C|$



$|A| + |B| + |C|$
$- |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C|$
$+ |A \cap B \cap C|$

ör. 1 ile 1000 arasında (1 ve 1000 dahil) kaç tane sayı $2'$ye $3'$e yada $5'$e bölünebilir?

Çözüm.

n, 1'den büyük tamsayı olmak üzere; $2'$ye bölünebilen sayılar $2n$, $3'$e bölünebilen sayılar $3n$ $5'$e bölünebilen sayılar $5n$ formundadır.

1 ile 1000 arasında $2'$ye bölünebilen sayılar kümesi: $A = \{2n: 1 \leq n \leq 500\} \Rightarrow |A| = 500$

1 ile 1000 arasında $3'$e bölünebilen sayılar kümesi: $B = \{3n: 1 \leq n \leq 333\} \Rightarrow |B| = 333$

1 ile 1000 arasında $5'$e bölünebilen sayılar kümesi: $C = \{5n: 1 \leq n \leq 200\} \Rightarrow |C| = 200$

Hem $2'$ye hem $3'$e bölünebilen sayılar kümesi $A \cap B = \{6n: 1 \leq n \leq 166\} \Rightarrow |A \cap B| = 166$

Hem $2'$ye hem $5'$e bölünebilen sayılar kümesi $A \cap C = \{10n: 1 \leq n \leq 100\} \Rightarrow |A \cap B| = 100$

Hem $3'$e hem $5'$e bölünebilen sayılar kümesi $B \cap C = \{15n: 1 \leq n \leq 66\} \Rightarrow |B \cap C| = 66$

$2'$ye, $3'$e ve $5'$e bölünebilen sayılar kümesi $A \cap B \cap C = \{30n: 1 \leq n \leq 33\}$

$$\Rightarrow |A \cap B \cap C| = 33$$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C| = 734$$

Genelleştirilmiş Çarpım Kuralı

ör. 8 koşucu 100 metre finalinde yarisiyor. Altın, gümüş ve bronz madalya kaç farklı şekilde bu koşuculara verilebilir?

Çözüm.

Altın için 8 farkli aday vardır. A kümesi bu adayların kümesi olsun.

Altın alan koşucuyu çıkardıktan sonra geriye kalan 7 koşucunun her biri gümüş alabilir; yani gümüş için 7 aday vardır. G kümesi bu adayların kümesı olsun.

Altını alan koşucuyu ve gümüşü alan koşucuyu çıkardıktan sonra geriye 6 kişi bronzu alabilir. Bronz için 6 aday vardır. B kümesi bu adayların kümesı olsun.

A, G ve B kümelerinden yapılabilcek toplam seçim sayısı çarpım kuraliyla bulunabilir:

$$|A| \times |G| \times |B| = 8 \times 7 \times 6 = 336$$

Bu örnekte daha önce gördugumuz çarpım kurali orneklerinin aksine <u>secimler birbirine baglidir</u>; dolayisiyla kümeler birbirine baglidir. Bu sekilde seçimlerin birbirine bagli olduğu durumlardaki çarpım kuralına '*genelleştirilmiş çarpım kuralı*' denir.

ör. İlk üç hanesi aynı rakam olan kaç tane 4 haneli şifre vardır?

Çözüm.

Birinci hanedeki rakam için 10 farklı seçenek vardır.

Ikinci hanedeki rakam birinci hanedeki ile aynı olmalıdır. Yalnızca 1 seçenek vardır.

Üçüncü hanedeki rakam, ilk iki hanedeki rakamla aynı olmalıdır. Yalnızca 1 seçenek vardır.

Dördüncü hanedeki rakam için bir şart yoktur. 10 farklı seçenek vardır.

Sonuç olarak bu şekilde üretilebilecek 4 haneli şifre sayısı : $10 \times 1 \times 1 \times 10 = 100$

Soru:

Bir kahvecide americano, cappuccino, espresso, latte, macchiato ve mocha olmak uzere 6 kahve türü bulunmaktadır. Bu kahvelerden americano ve espresso sütsüz diğerleri sütlüdür. Sütlü kahveler soya sütü, yarım yağlı süt veya tam yağlı süt ile yapılmaktadır. Ayrıca satılan her kahve için kafeinsiz ve kafeinli seçenekler sunulmaktadır.

Bu kahvecide kaç farklı kahve içilebiliriz?

Cevap. 28

Permütasyon (Sıralama)

Bir kümeninin permütasyonu bu kümenin elemanlarinin sıralanmasıdır.

Teorem: n elemanlı bir kümenin permutasyon sayisi $n!$ dir. Başka bir deyişle n elemanlı bir kümenin elemanları $n!$ şekilde sıralanır.

Kanıt:

n	n-1	...	1

$= n!$

seçenek sayıları

genelleştirilmiş çarpım kuralı ile

ör.COMPUTER kelimesinin harfleri kullanılarak:

i) 8 harfli kaç tane kelime yazılabilir?

Cevap: 8!

ii) Içinde 'ET' alt kelimesi geçen 8 harfli kaç tane kelime yazılabilir?

Çözüm. E ve T cikarildiginda geriye 6 harf kalir. ET kelimesini bir harf gibi dusunuruz. Toplamda 7 harfimiz olur. Bu 7 harf ile 7! Şekilde sıralanabilir.

Bölme Kuralı

Ekleme-çıkarma yaparken 'önce say sonra özür dile' yaklaşimini kullanmistik. Bölme kurali da buna benzer bir yaklaşimdir.

Bir kümenin her elemanini n defa sayarsak $(n > 1)$ bu kümedeki eleman sayısı, fazla sayarak bulduğumuz eleman sayisinin n'e bölünmesi ile elde edilir. (n'e bölerek fazla saydigimiz için özür dilemiş,hatamızı düzeltmiş oluyoruz).

Örneğin, gerçekte 2 elma 4 armut ve 4 mandalina olan bir meyve sepetindeki her bir meyveyi 3'er kez sayarsak; sepetteki toplam meyve sayısını

$$2 \times 3 + 4 \times 3 + 4 \times 3 = 30$$

buluruz. Bu toplamı fazla sayma sayısı 3'e bölerek $\frac{30}{3} = 10$ sepetteki gerçek meyve sayısını buluruz.

Ana fikir: Her şeyi k defa saydığımızda toplam sayıyı k'ya bölersek kaç tane şey saydığımızı buluruz.

ör. Bir partide 4 kişi vardir. Herkes birbiriyle el sıkışırsa toplam kaç el sıkışması olur?

Çözüm.

4 kişinin her biri geriye kalan 3 kişiyle el sıkışır. Toplam el sıkışma sayısı çarpım kuralıyla: $4 \times 3 = 12.$

Fakat bu şekilde her bir el sıkışmasını 2 defa saymış oluyoruz.

Gerçekten, diyelimki partideki kişiler A,B,C,D kişileri olsun.

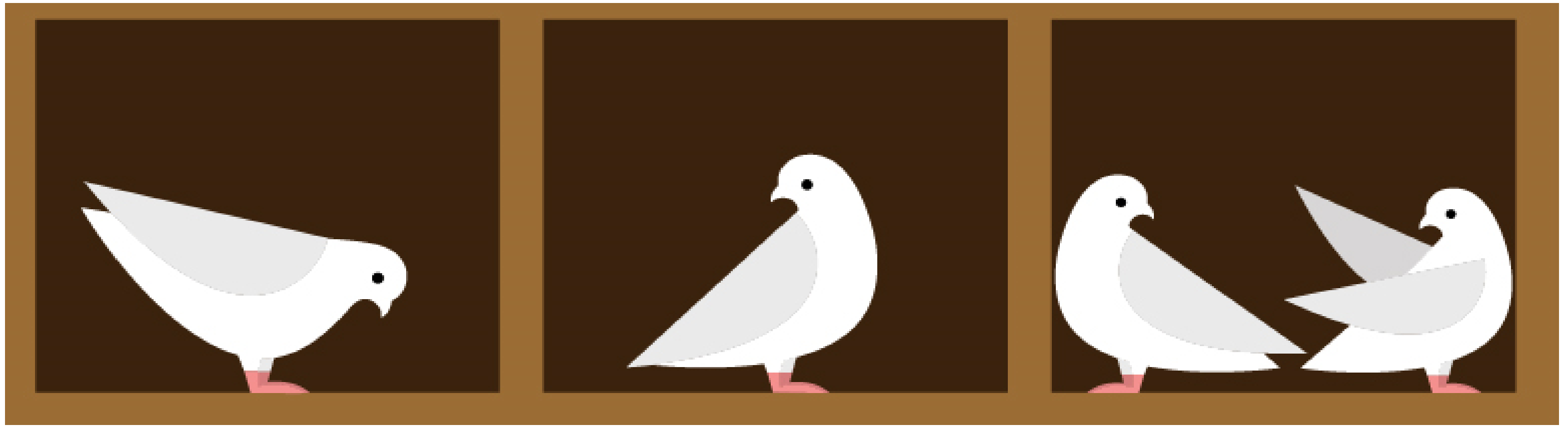
A; partideki kişilerle el sıkışırsa A ile B arasinda; A ile C arasinda ve A ile D arasinda el sıkışması olur.

B; partideki kişilerle el sıkışırsa B ile A arasinda; B ile C arasinda ve B ile D arasinda el sıkışması olur.

Fakat A ile B arasindaki el sıkışmasını daha önce saymıştık, bu şekilde devam edersek her el sıkışmasını 2 defa saymış oluruz. Bu yüzden çarpma kuralı ile bulduğumuz toplam el sıkışma sayısı olan 12' yi fazla sayma sayısı 2'ye bölerek gerçekte olan toplam el sıkışma sayısını 6 olarak buluruz.

Güvercin Yuvası Prensibi (Pigeonhole Princible)

Eğer bir yerdeki güvercin sayısı, güvercin yuvası sayısından fazla ise, en az bir yuvada birden fazla güvercin vardır.



ör. Bir odadaki 13 kişiden en az iki kişi aynı ay doğmuştur.

13 güvercin (kişi), 12 güvercin yuvası (ay)

ör. İstanbul'da aynı sayıda saç teline sahip iki kişi vardır.

Bir insandaki toplam saç teli sayısı 0-500.000 arasındadir.

İstanbul'da milyonlarca kişi yaşar.

Milyonlarca kişiyi güvercin, saç teli sayısını güvercin yuvası sayısı olarak düşünürsek aynı sayıda saç teline sahip bir çok kişi bulunabilir.

Güvercin Yuvası Prensibinin Matematiksel İfadesi

Teorem: A ‘nın eleman sayısı B’den fazla olacak şekilde ($|A| > |B|$) A ve B iki küme olsun.

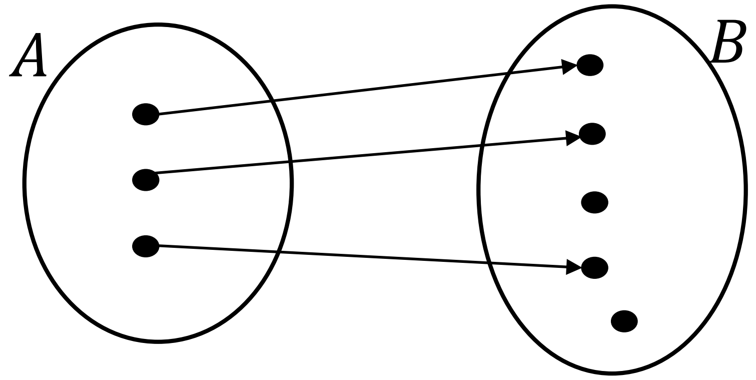
$f: A \to B$ herhangi bir fonksiyon olsun. Bu durumda A’nın $a \in A$ ve $a' \in A$ gibi iki farklı elemanı vardır öyleki bunların görüntüleri eşittir: $f(a) = f(a')$.

Kanıt:

f fonksiyonu A‘dan B ‘ye birebir bir fonksiyon olsun. Tanım gereği:

$$\forall\, a, a' \in A:\ a \neq a' \Rightarrow f(a) \neq f(a')$$

Bu durumda $|A| \leq |B|$ olur.



Bunu mantıksal önerme olarak yazarsak:

p: f fonksiyonu A'dan B 'ye birebir bir fonksiyon, ve q: $|A| \leq |B|$ olmak üzere $p \Rightarrow q$

$p \Rightarrow q$ önermesi $\sim q \Rightarrow \sim p$ önermesine denktir.

$\sim q$: $|A| > |B|$

$\sim p$: f fonksiyonu A'dan B 'ye birebir bir fonksiyon değildir.

f fonksiyonu A'dan B 'ye birebir bir fonksiyon değilse A'da görüntüleri aynı olan birbirinden farklı iki eleman vardır. Gerçekten

$\sim[\forall\, a, a' \in A\colon\ a \neq a' \Rightarrow f(a) \neq f(a')] \Leftrightarrow \exists\, a, a' \in A\ a \neq a'\ \wedge f(a) = f(a')$

(Hatırlayın: $\sim[p \Rightarrow q] \Leftrightarrow \sim[\sim p \vee q] \Leftrightarrow p \wedge \sim q$)

ör.

Meclisteki 600 milletvekili toplam 5 yasanin her birini kabul, red ve çekimser oylarindan birini kullanarak oylamıştır. Bu durumda güvercin yuvası prensibi gereği 5 yasa için birbirleriyle tamamen aynı oyları veren milletvekilleri vardır.

(5 yasa için olabilecek tüm seçimler: $3^5 = 235$ ve $600 > 235$)

Kombinasyon

ör. 17 kişi içerisinden 4 kişi seçmek istiyoruz. Bu seçimi

i) kişileri hangi sırayla seçtiğimiz önemli iken;

ii) kişileri hangi sırayla seçtiğimiz önemsiz iken

kaç farklı şekilde seçebiliriz?

Çözüm.

i) Bunu öncelikle genelleştirilmiş çarpım kuralıyla bulabiliriz.

Seçilecek ilk kişi için 17; ikinci için 16, üçüncu için 15 ve dördüncü için 14 seçenek vardır.

Genelleştirilmiş çarpım kuralıyla toplam seçenek sayısı: $17 \times 16 \times 15 \times 14$ bulunur.

Ikinci bir yol olarak şöyle düşünelim.

17 kisiyi permutasyon kurali ile 17! şekilde sıralar her bir sıralamadan ilk 4 kişiyi seçebiliriz.

Şu an için cevap 17!'dir.

Fakat bu şekilde her bir 4 kişilik grubu 13! defa fazladan saymış oluruz.

Gerçekten diyelimki A,B,C,D kişilerini sıralamanın ilk 4 pozisyonunda sabitleyelim:

A	B	C	D													

13! farklı şekilde sıralanır.

17!'i, fazla sayma sayısı olan 13!'e bolerek gerçek sayma sayisina ulaşiriz:

$$\frac{17!}{13!} = 17 \times 16 \times 15 \times 14$$

ii) kisileri hangi sirayla sectigimiz onemli degil iken 17 kisiden, 4 kisi secelim.

1. aşama: 17 kisi, $17!$ şekilde sıralanabilir.

2. aşama: $\frac{17!}{(17-4)!}$ şekilde sıralı 4 kisi secilebilir. Fakat bu sekilde her bir 4'lü grup $4!$ defa sayilmistir. Örnegin A,B,C,D kişileri, ABCD, BCDA, CDBA ... sekilde $4!$ defa fazladan sayilmistir.

3. aşama 17 kisi icersinden secilen 4 kisiyi fazladan sayma sayisi olan $4!$ bolerek secimin sıradan bagimsiz olmasini saglariz.

Sonuc olarak cevap: $\frac{17!}{(17-4)! \cdot 4!}$

Kombinasyon

$n, k \in \mathbb{Z}^+$ ve $k \leq n$ olsun. Bu durumda n elemanlı bir kumeden secilebilecek k elemanlı altkumelerin sayisi kombinasyon ile bulunur:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

ör. 12 kisilik bir basketbol kadrosundan kac farkli sekilde ilk 5 oluşturabiliriz?

Çözüm. $\binom{12}{5} = \frac{12!}{7! \cdot 5!} = 792.$

ör. 32 bit uzunlugunda kac tane string 3'ten az sayida 1 içerir?

Çözüm. 0 tane 1 iceren 32 bit uzunlugundaki string sayısı: $\binom{32}{0} = 1.$

1 tane 1 ieceren 32 bit uzunlugundaki string sayısı: $\binom{32}{1} = 32.$

2 tane 1 ieceren 32 bit uzunlugundaki string sayısı: $\binom{32}{2} = 496.$

Toplam= $1 + 32 + 496 = 529$

ör. Düzgün bir bozuk para 10 defa atilirsa 5'inde yazı gelme olasiligi ne olur?

Çözüm. Atilan bozuk paranin sonuclari 10 uzunlugundaki bir dizinin elemanlari olsun. Dizinin her bir elemani icin 2 secenek vardir: T ve Y.

Bu sekilde olusturulabilcek dizi sayisi carpim kurali ile: $2^{10} = 1024.$

Baska bir deyisle bir parayi 10 kez atarak 1024 farkli sonuc elde edebiliriz.

5 yazi, 10 defa atilan bir parada $\binom{10}{5} = 252$ farkli yerde gözukebilir. Yani 5 yazinin gorulmesi icin 252 secenek vardir.

Su halde aranan olasilik $\frac{252}{1024} \approx 0{,}24$

Kombinasyonla İlgili Bazı Teoremler

n herhangi bir pozitif tamsayi ve $k \in \{0,1,..,n\}$ olsun.

Teorem: $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$

Kanıt 1 (Cebirsel Kanıt):

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot \big(n-(n-k)\big)!} = \binom{n}{n-k}$$

Kanıt 2 :

n elemandan k kisiyi secmek demek, n elemandan $(n-k)$ kisiyi secmemek demektir.

n elemandan k kisi $\binom{n}{k}$ şekilde secilir; n elemandan $(n-k)$ kisi $\binom{n}{n-k}$ sekilde secilmez/secilir.

Teorem: $\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k}$

Kanıt 1 (Cebirsel Kanıt):

$$\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

$$= \frac{(n-1)!}{k! \cdot (n-1-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)! \cdot (n-k)!}$$

$$= \frac{(n-1)!}{k! \cdot (n-1-k)!} \cdot \frac{n-k}{n-k} + \frac{(n-1)!}{(k-1)! \cdot (n-k)!} \cdot \frac{k}{k}$$

$$= \frac{(n-1)! \cdot (n-k)}{k! \cdot (n-k)!} + \frac{(n-1)! \cdot k}{k! \cdot (n-k)!}$$

$$= \frac{(n-1)! \cdot [(n-k)+k]}{k! \cdot (n-k)!}$$

$$= \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{k}$$

Kanıt 2:

n kisiden k kisi secelim. Belirli bir kisi, diyelim ki Ahmet, bu n kisinin icerisinde olsun.

Bu durumda secilen k kisi icersinde ya Ahmet olur yada Ahmet olmaz.

Diyelimki Ahmet secilen kisiler icersinde olmasin. Bu durumda $(n-1)$ kisiden k kisi secilir.

Bu sekilde olabilecek secimlerin sayisi

$$\binom{n-1}{k}$$

İkinci durumda diyelimki Ahmet bu kisiler icersinde olsun.

Bu durumda $(n-1)$ kisiden $k-1$ kisi secilir. Bu sekilde olabilecek secimlerin sayisi

$$\binom{n-1}{k-1}$$

Birinci ve ikinci secimleri toplarsak

$$\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k}$$