Bilgisayar Destekli Lineer Cebir

Fırat İsmailoğlu,PhD

Matris Determinantı

Bir Matrisin Determinantı

Determine, Ingilizce belirlemek, karar vermek anlamına gelir. Bu fiilin isim hali olan determinant ise *belirleyici* anlamına gelir.

$n \times n$ boyutundaki bir kare matrisin determinantı ise bu matrisin tersinin olup olmadığını belirlememizde rol oynar. Basitce, bir matrisin determinantı 0'dan farklı ise bu matrisin tersi var diyeceğiz.

n tane bilinmeyenden oluşan n tane lineer denklem verilsin. Bu denklemin katsayılarini A katsayılar matrisinde, bilinmeyenlerini x vektörunde, sonuçlarını b vektöründe tutalım:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{bmatrix}}_{b}$$

Burada x'i yalnız bırakmak için denklemin her tarafını A'nın tersi olan A^{-1} ile çarparsak:

$$x = A^{-1}b$$

olur. Yani sistemin çözümü basitçe $A^{-1}b$ dir. Fakat katsayılar matrisinin tersinin (A^{-1}) her zaman var olacaği garanti degildir. Bu matrisin tersinin olup olmayacagini matrisin determinantina bakarak karar verecegiz.

Sonuc olarak verilen lineer denklem sisteminin bir cozumunun var olup olmadiğini belirlemek için katsayilar matrisinin determinantina bakacagiz.

Determinant Notasyon:

Determinantı $\mathbb{R}^{n\times n}$ uzayından $\mathbb{R}$' ye bir fonksiyon olacarak göstereceğiz:

$$det : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$$

Yani örneğin A matrisin determinatını $det(A)$ ile gösterecegiz. Bundan başka, aşağıdaki şekilde mutlak değer kullanarak da determinant gösterilir.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \det(A)$$

Determinantın Hesaplanması

A katsayılar matrisinin determinant hesaplaması için genel bir kural vermeden önce A'nin bazi ozel durumlari icin determinant hesaplamasini verelim.

1. $A, 1 \times 1$ bir matris ise:

Bu durumda A'nın tek bir elemanı vardır: $A = [a_{11}]$ ve verilen denklem $a_{11}x = b$ formunda olur. Buradan $x = b/a_{11}$ olur. Sistemin çözümünün olabilmesi için $a_{11} \neq 0$ olmak zorundadır. O halde burada belirleyici faktör a_{11}'dir; dolayısıyla tek elemanlı bir matrisin determinanıtı sahip olduğu tek elemandır:

$$\boxed{A = [a_{11}] \text{ ise } det(\mathrm{A}) = a_{11}}$$

2. $A, 2 \times 2$ bir matris ise:

Bu durumda $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ ve buna bağlı lineer denklem sistemi ise:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned}$$

olur.

Birinci denklem a_{22}; ikinci denklem $-a_{12}$ ile çarpilip denklemler toplanırsa

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}$$

elde edilir. Buradan x_1 çekilrse:

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

olur. Sistemin çözümünün olabilmesi için payda $(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$, 0'dan farklı olmak zorundadır. O halde burada belirleyici olan $(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$ büyüklüğüdür. Sonuc olarak A'nın determinantı da bu büyüklüğe eşit olur.

$$\boxed{A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ ise } det(\mathrm{A}) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

Tek elemanlı bir matrisin determinanti kendisi oldugundan a_{22} yerine $|a_{22}|$ ve a_{21} yerine $|a_{21}|$ yazılabilir. O halde determinant:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}|a_{22}| - a_{12}|a_{21}|$$

Burada dikkat edilmesi gereken nokta 2×2 boyutundaki matrisin determinant hesabinin 1×1 boyutundaki matrislerin determinantini içermesidir.

ör. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ ise $det(\mathrm{A}) = 1 \cdot 3 - (-1 \cdot 2) = 5$

$A = \begin{bmatrix} \overset{+}{a_{11}} & \overset{-}{a_{12}} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ ise $det(\mathrm{A}) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

3. $A, 3 \times 3$ bir matris ise:

Bu durumda $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ ve buna bağlı lineer denklem sistemi ise:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= 0 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= 0 \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= 0
\end{aligned}
$$

Not: Burda kolaylık acısından b_1, b_2 ve b_3 ‘ü 0 olarak düşündük, cunku zaten bu degerler sistemin cozumunun var olup olmamasini etkilemez. Çözümün var olması A katsayilar matrisine baglidir.

x_2 ve x_3’ü yok etmek icin birinci, ikinci ve ucuncu denklemler uygun katsayilarla carpilip bu denklemler toplanirsa

$$\big(a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})\big)x_1 = 0$$

olur. Sistemin çözumunun olabilmesi icin x_1’in katsayısının 0’dan farkli olmasi gerekir. O halde

$$\big(a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})\big) \neq 0$$

olmalıdır. Sistemin cozumun var olup olmadigini bu katsayi belirler.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$ ise

$$det(A) = \big(a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})\big)$$

,

$$det(A) = (a_{11}\underbrace{(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32})} - a_{12}\underbrace{(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31})} + a_{13}\underbrace{(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})})$$

a_{11}'in in olduğu satır ve sütun A matrisnden çıkarıldığında ortaya çıkan matrisin determinantı

a_{12}'nin in olduğu satır ve sütun A matrisnden çıkarıldığında ortaya çıkan matrisin determinantı

a_{13}'ün in olduğu satır ve sütun A matrisnden çıkarıldığında ortaya çıkan matrisin determinantı

3×3 boyutundaki bir matrisin determinant hesabı, 2×2 boyutundaki matrislerin determinantini ve dolayısıyla 1×1 boyutundaki matrislerin determinantini içermektedir.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$a_{11}(a_{22}|a_{33}| - a_{23}|a_{32}|) - a_{12}(a_{21}|a_{33}| - a_{23}|a_{31}|) + a_{13}\,(a_{21}|a_{32}| - a_{22}|a_{31}|)$$

ör. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ matrisinin determinantı nedir?

$$\begin{array}{ccc} + & - & + \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 1(1 \cdot 4 - 2 \cdot 2) - 2(3 \cdot 4 - 2 \cdot 1) + 1(3 \cdot 2 - 1 \cdot 1) = 0 - 20 + 5 = -15$$

ör.

$$\begin{gathered} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + kx_3 = 0 \end{gathered}$$

Yukarıda verilen denklem sisteminin bir çözümünün *olmaması* için k ne olmalıdır?

Çözüm.

Denklem sisteminin bir çözumunun olmaması için katsayılar matrisinin determınantı 0 olmalıdır.

ör. Katsayılar matrisi: $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & k \end{bmatrix}$ olup bu matrisin determinantı:

$$2(-2) + 1 \cdot (k+3) + 3 \cdot (-2) = k - 7$$

olur. Determinantı 0 yapan k değeri 7 olur.

Determinant Genel Formul

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tipindeki bir kare matrisin determinantı şu formulle hesaplanır:

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \, det\left(M_{ij}\right)$$

Burada i, 1 ile n arası herhangi bir tamsayıdır.

M_{ij}, A matrisinde a_{ij} elemanının olduğu satır ve sütün çıkarıldığında ortaya çıkan matristir.

Determinant Genel Formul

Özel olarak i'yi 1 alırsak aşağıdaki formulu elde ederiz. Hesaplamalarımızda bu formulu kullanacagiz.

$$\boxed{det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j}\, det(M_{1j})}$$

ör. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ matrisinin determinantını yukarıdaki formul ile hesaplayalım.

$$\begin{aligned} \det(A) &= (-1)^{1+1} a_{11}\, det(M_{11}) + (-1)^{1+2} a_{12}\, det(M_{12}) + (-1)^{1+3} a_{13}\, det(M_{13}) \\ &= 1\, det(M_{11}) - 2\, det(M_{12}) + 1\, det(M_{13}) \end{aligned}$$

$det(M_{11}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0, \quad det(M_{12}) = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 10, \quad det(M_{13}) = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5,$

determinantlarini yukarida yerine yazarsak:

$\det(A) = 0 - 2 \cdot 10 + 5 = -15$

ör. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & -5 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \\ -4 & -2 & 6 & 7 \end{bmatrix}$ matrisinin determinantini hesaplayınız.

Çözüm.

$$\det(A) = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ -2 & 6 & 7 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ -4 & 6 & 7 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \\ -4 & -2 & 7 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 2 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & 6 \end{vmatrix}$$

Not:Verilen genel determinant formulune dikkat edilirse bu formul rekürsiftir!! Determinanıtın hesaplanmasi için baska determinantların hesaplanması gerekir. Cevabın için içinde sorunun kendi vardır.

Rekürsif Determinant Kodu

```
function dett=detHesapla(A);
    n=size(A,1);
    if n==1
      dett=A;%tek elemanli matrisin determinanti kendine esittir
    else
      toplam=0;
      for j=1:n
        M=A(2:end,setdiff(1:n,j));
        toplam=toplam+(-1)^(j+1)*A(1,j)*detHesapla(M);
      end
      dett=toplam;
    end
end
```

Determinantın Özellikleri

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ bir kare matris olsun.

Teorem 1: A'nın tamamı 0'dan oluşan bir satırı varsa $\det(A) = 0$ olur.

Kanıt:

$i \in \{1, \dots, n\}$ olmak üzere diyelimki A'nın i. satırının tamamı 0 olsun:

$\forall j \in \{1, .., n\}\ a_{ij} = 0$.

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot 0 \cdot \det(M_{ij}) = 0$$

ör. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ ise $\det(A) = 0$ olur.

Çünkü, $\det(A) = (-1)^{2+1} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$

Determinantın Özellikleri

Teorem 2: A'nın herhangi bir satırının k sayısıyla çarpımıyla bir B matrisi oluşsun. Bu halde

$$\det(B) = k \cdot \det(A)$$

olur. Bu teoremin baska bir ifadesi şöyledir: bir matrisin bir satırı bir sayıyla çarpılırsa, bu matrisin determinanti da o sayıyla çarpılmış olur.

Kanıt:

$i \in \{1, \dots, n\}$ olmak üzere A'nın i. satırını bir k sayısıyla çarparak, diğer satırlara dokunmayarak bir B matrisi elde edelim. Şu halde

$b_{ij} = k \cdot a_{ij}$ $(j \in \{1, .., n\})$ olur.

$$\det(B) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} b_{ij} \det(M_{ij}) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} k \cdot a_{ij} \det(M_{ij}) = k \cdot \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(M_{ij}) = k \cdot det(A)$$

ör. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ iken $\det(A) = 18$'dir. Şu halde $\left\| \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 4 \\ 2 \cdot 1 & 2 \cdot 2 & 2 \cdot 4 \end{bmatrix} \right\| = 36$ olur.

Benzer bir mantıkla eğer bir matriste bir satırı bir k sayısına bölersek determoinantı da k'ya bölmüş oluruz.

Örnek olarak A matrisinin ikinci satirinin ikiye bölünmesi oluşan $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ matrisin determaınantı A'nın yarsi kadar olur: $\det(B) = 9$.

Sonuç (Corollary) : $\det(k \cdot A) = k^n \cdot \det(A)$

Kanıt:

$n \times n$ boyutundaki bir matrisi k gibi bir sayiyla çarpmak, matrisin n satırının tamamını k ile çarpmak anlamına gelir. Her bir satır için matrisin determinantı k katına çıkaçağından n satır için determinant k^n katına çıkar.

Teorem 3: A matrisinin satırlarını R ile gösterelim.

$$\left|\begin{bmatrix} R_1 \\ \cdots \\ R_i + R_j \\ \cdots \\ R_n \end{bmatrix}\right| = \left|\begin{bmatrix} R_1 \\ \cdots \\ R_i \\ \cdots \\ R_n \end{bmatrix}\right| + \left|\begin{bmatrix} R_1 \\ \cdots \\ R_j \\ \cdots \\ R_n \end{bmatrix}\right|$$

ör. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ matisinin determinantı, $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ve $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ matrislerinin determinantları toplamına eşittir.

(iki matrisin ucuncu satirlari toplamlari ilk matrisin ucuncu satirini veriyor)

Kanıt: A, B, ve C matrislerinin i. satırları hariç diğer her satırı birbirlerinin aynısı olsun.

Ayrıca A matrisinin i. satırı, B matrisinin i. satırı ile C matrisinin i. satırının toplamından oluşsun:

$$a_{ij} = b_{ij} + c_{ij} \quad (j \in \{1, \dots n\})$$

olur. B ve C matrislerinin determinantları toplamının A'nin determinantına eşit olduğunu göstereceğiz.

i. satır üzerinden B ve C matrislerinin determinantları toplamı

$$\det(B) + \det(C) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} b_{ij} \det(M_{ij}) + \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} c_{ij} \det(M_{ij})$$

$$\sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} (b_{ij} + c_{ij}) \det(M_{ij}) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(M_{ij}) = \det(A)$$

(not: B ve C'nin i. satırlari haric diger tum satrları ayni oldugundan her iki matris icin $\det(M_{ij})$ aynıdır, çunku i. satiri sildigimizde ortaya çikan matris ikisi icin de aynidir)

Teorem 4: Iki matrisin çarpımlarının determinantı; bu matrislerin determinatlarinin carpimina esittir. Yani A ve B; $n \times n$ boyutunda iki matris olsunlar. Bu durumda aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

ör. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ ve $\mathrm{B} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ olsun. Bu durumda $AB = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 13 & 5 \end{bmatrix}$ olup $\det(AB) = -70$

olur. $\det(A) = 5$ ve $\det(B) = -14$ olup $\det(A)$ ve $\det(B)$ nin çarpımları $\det(AB)'$yi verir.

Teorem 5: Bir matriste herhangi iki satiri yer değistirseniz, matrisin determinantıinin işareti degisir (pozitif iken negatif; negatif iken pozitif olur). Yani B; A'nin herhangi satirinin yer değiştirilmesiyle oluşan bir matris olsun. Bu durumda

$$\det(B) = -\det(A)$$

olur.

Kanıt: Diyelimki A 3×3 boyutunda bir matris olsun. Bu matrisin birinci ve ikinci satırını yer degistirmek icin, A matrisini soldan $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ile çarpabiliriz (dikkat edersek bu, birim matrisin birinci ve ikinci satirinin yer degistirmis hali).

$$\det(B) = \det\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A\right) = det\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \det(A)$$

olur. Bu eşitliğin sağlanmasinda bir onceki teoremi kullandik.

$det\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = -1$ olduğundan

$$\det(B) = -\det(A)$$

olur.

Teorem 6: Bir matrisin herhangi birbirinin aynı herhangi iki satırı varsa, bu matrisin determinantı 0 olur.

ör. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ iken $\det(A) = 0$ olur. (birinci ve ucuncu satiri ayni).

Kanıt B matrisi, herhangi iki satırı aynı olan bir A matrisinin bu satırların yer değiştirmesiyle oluşsun. Bir önceki teoremde görmüştükki satırlarin yer değiştirilmesiyle oluşan matrisin determinantı, orijinal matrisin eksi işaretlisi olur. Yani

$$\det(\mathrm{B}) = -\det(A)$$

olur. Aynı olan satırları yer değiştirdigimizden yeni matris eskisiyle ayni olur: $B = A$, bu durumda

$$\det(\mathrm{B}) = \det(A)$$

olur. $\det(\mathrm{B}) = -\det(A) = \det(A)$ olabilmesi ancak $\det(A) = 0$ olması ile mümkündür.

Teorem 7: A 'nın herhangi bir satırını k sayısıyla çarpar, bu satırı başka bir satıra eklersek A'nın determinantı değişmez.

Kanıt: A matrisinin j. satırını R_j bir k sayısı ile çarpıp bu satırı A matrisinin $i.$ satırına (R_i'ye) ekleyelim. Ortaya çıkan yeni matrise B matrisi dersek, B matrisi su formda olur: ($R_i, i.$ satır)

$$B = \begin{bmatrix} R_1 \\ \dots \\ R_i + kR_j \\ \dots \\ R_j \\ \dots \\ R_n \end{bmatrix}$$

Teorem 3'ten B'nin determinantı $\begin{bmatrix} R_1 \\ \dots \\ R_i \\ \dots \\ R_j \\ \dots \\ R_n \end{bmatrix}$ ve $\begin{bmatrix} R_1 \\ \dots \\ kR_j \\ \dots \\ R_j \\ \dots \\ R_n \end{bmatrix}$ matrislerinin determinantlari toplamina esitr.

$$\left|\begin{bmatrix} R_1 \\ \cdots \\ R_i + kR_j \\ \dots \\ R_j \\ \dots \\ R_n \end{bmatrix}\right| = \left|\begin{bmatrix} R_1 \\ \cdots \\ R_i \\ \dots \\ R_j \\ \dots \\ R_n \end{bmatrix}\right| + \left|\begin{bmatrix} R_1 \\ \cdots \\ kR_j \\ \dots \\ R_j \\ \dots \\ R_n \end{bmatrix}\right| = \underbrace{\left|\begin{bmatrix} R_1 \\ \cdots \\ R_i \\ \dots \\ R_j \\ \dots \\ R_n \end{bmatrix}\right|}_{\text{Bu determinant orjinal matrisin } (A\text{'nın}) \text{ determinantına eşittir.}} + k \left|\begin{bmatrix} R_1 \\ \cdots \\ R_j \\ \dots \\ R_j \\ \dots \\ R_n \end{bmatrix}\right|$$

İki satır birbirinin aynı olduğundan matris determinantı 0'dır.

ör. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ matrisinin üçüncü satırını -1 ile çarpıp birinci satıra ekleyelim:

$B = \begin{bmatrix} 1-1 & 2-2 & 1-4 \\ -2 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ -2 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ olur. B'nin determinantı 18'dir, bu da A'nın determinantı ile aynıdır.