

Ad-Soyad:

No:

1.Öğretim 2.Öğretim

Sivas Cumhuriyet Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Bilgisayar Mühendisliği Bölümü

Bil1006 Bilgisayar Destekli Lineer Cebir 2019 - Bahar Final Sınavı

1. i. Varsayalımki bir sınavda doğru çözülen her matematik sorusu 5 puan, her fizik sorusu 3 puan ve her kimya sorusu 2 puan getirsin. Bu sınavda Ahmet 9 matematik, 11 fizik ve 4 kimya sorusunu doğru çözmüş; Bülent 6 matematik, 11 fizik ve 7 kimya sorusunu doğru çözmüş ve Ceyda 4 matematik, 6 fizik ve 3 kimya sorusunu doğru çözmüş olsun. Ahmet, Bülent ve Ceyda'nın bu sınavdan toplamda kaç puan aldıklarını **matris vektör çarpımı ile** hesaplayınız (10 puan).

ii. i. adımdaki hesaplamamızın MATLAB (Octave) kodunu yazın. (Buradaki matris – vektör çarpımını for loop kullanarak yazmanız gerekmektedir) (10 puan).

Çözüm.

i. Kişilerin aldığı notlar N matrisini oluştursun. Burada her satır bir kişiye her kolon ise bir sınava denk gelmektedir.

$$N = \begin{bmatrix} 9 & 11 & 4 \\ 6 & 11 & 7 \\ 4 & 6 & 3 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

Derslerin puanları ise bir p vektöründe tutulsun. Burada her bir satır bir derse denk gelmektedir.

$$p = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}_{3 \times 1}$$

N matrisi ile p vektörünün çarpımı sonucu oluşan vektörün her satırı bir kişinin sınavda aldığı toplam puana denk gelir. Bu vektör aradığımız vektördür.

$$N \times p = \begin{bmatrix} 86 \\ 77 \\ 44 \end{bmatrix}_{3 \times 1}$$

ii. N = [9 , 11 , 4 ; 6 , 11, 7; 4 , 6 ,3];

p = [5 ; 3 ; 2];

carpimVektor=zeros(3,1);

for i=1:3

carpimVektor(i)=N(i,:)*p;

end

	Korku	Komedi	Dram	Macera
Ahmet	5	2	1	4
Bulent	2	3	5	2
Ceyda	5	3	2	4

2. Yukarıda gösterilen F matrisi, Ahmet, Bülent ve Ceyda adlı kişilerin dört farklı film türüne olan ilgilerinin 1-5 arası derecesini göstermektedir.

i. F matrisini transpozu ile çarpınız (10 puan).

ii. i. adımda bulduğunuz çarpım matrisinin i. satırının j. elemanı (i, j'den farklı olmak üzere) neyi ifade etmektedir, ne anlama gelmektedir? (5 puan)

iii. i. adımdaki hesaplamamızın MATLAB (Octave) kodunu yazın. Bunu yaparken bir yada iki for loop kullanın. (10 puan).

Çözüm.

i. $F = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 2 \\ 5 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ ise bu matrisin tranzpozunu : $F^T = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ olur. Bu iki matrisin çarpımı :

$$FF^T = \begin{bmatrix} 46 & 29 & 49 \\ 29 & 42 & 37 \\ 49 & 37 & 54 \end{bmatrix}$$

ii. i, j 'den farklı iken FF^T matrisinin i . satirinin j . elermanı i ve j kişilerinin film zevklerinin benzerliklerini niceler.

iii. $F = [5, 2, 1, 4; 2, 3, 5, 2; 5, 3, 2, 4]$;

```
carpimMatris=zeros(3,3);
```

```
for i=1:3
```

```
    carpimMatris(:,i) = F * F'(:, i);
```

```
end
```

3. $A \in \mathbb{R}^{m \times l}$ matrisi ile $B \in \mathbb{R}^{l \times n}$ matrisini çarpmak için gereken işlem sayısının (çarpımının maliyetinin) $2 \cdot l \cdot m \cdot n$ 'ye eşit olduğunu detaylı olarak ispatlayınız (20 puan).

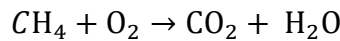
Çözüm.

$A \in \mathbb{R}^{m \times l}$ matrisi ile $B \in \mathbb{R}^{l \times n}$ matrisi çarpılırsa $m \times n$ boyutunda bir matris oluşur. Bu matrisin (i, j) . elemanı A matrisinin i . satırı ile B matrisinin j . Sütununu çarpımı ile elde edilir. Bu satır ve bu sütunun her biri l uzunluğundadır. l uzunluğundaki iki vektörün iç çarpımı yapılırken önce l tane çarpma işlemi yapılır (her bir eleman için) daha sonra ortaya çıkan l tane sayı toplanır. Sonuç olarak bu iç çarpım için $2l$ tane işlem gereklidir.

Çarpım matrisinin her bir elemanı için $2l$ işlem gereklidir. Bu durumda çarpım matrisin $m \times n$ tane elemanını hesaplamak için ise $2 \cdot l \cdot m \cdot n$ tane işlem gerekli olur.

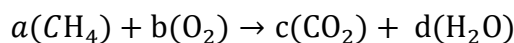
4. Lineer denklem sisteminin bir uygulaması olarak kimyasal tepkimeleri düşünebiliriz. Genel olarak bir kimyasal tepkimede her bir elementin tepkimeye giren atom sayısı ile tepkimeden çıkan atom sayısı birbirine denk olmalıdır. Bu sağlandığında kimyasal tepkime denkleştirilmiştir denir.

Buna göre aşağıda gösterilen kimyasal tepkimede tepkimeye giren ve çıkan moleküllerin hangi oranda alınacağını (yani kimyasal denklemin denkleştirilmesini) bir lineer denklem sistemi oluşturup daha sonra bu sistemi elementer satır işlemleriyle satır eşelon forma getirerek çözünüz (20 puan).



Çözüm.

Tepkimeye giren ve çıkan moleküllerin katsayılarına sırasıyla a, b, c ve d diyelim. Bu durumda



Tepkimeye giren ve çıkan karbon (C) atomu sayısı birbirine denk olacağından:

$$a = c$$

Tepkimeye giren ve çıkan hidrojen (H) atomu sayısı birbirine denk olacağından:

$$4a = 2d$$

Tepkimeye giren ve çıkan oksijen (O) atomu sayısı birbirine denk olacağından:

$$2b = 2c + d$$

olur. Elde edilen denklemler aşağıdaki şekilde bir lineer denklem sistemi olarak yazılabilir:

$$a - c = 0$$

$$4a - 2d = 0$$

$$2b - 2c - d = 0$$

Bu denklem sisteminin birleştirilmiş katsayılar matrisi:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

olur. Bu matrise elementer satır işlemleri uygulayarak satır eşelon forma getirelim:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Burada yaptığımız işlemler sırasıyla $R_2 \leftrightarrow R_3$ ve $R_4 \leftarrow -4R_1 + R_4$ işlemleridir. Satır eşelon forma gelmiş matrisin son satırından $4c - 2d = 0$ olur buradan $c = d/2$.

İkinci satırdan $2b + 2c - d = 0$ olur. Yukarıda bulduğumuz $c = d/2$ yerine konursa $b = 0$ olur.

Birinci satırdan $a - c = 0$ olur. Buradan $a = d/2$ olur.

Burada b ve d bağımsız değişkendir; a ve c ise d 'ye bağlı değişkenlerdir.

$\begin{bmatrix} d/2 \\ 0 \\ d/2 \\ d \end{bmatrix}$ sistemin genel çözümüdür. Her d değeri için sistemin bir çözümü elde edilir.

5. $A = \begin{bmatrix} k & k & 4 \\ 0 & k & 5 \\ 1 & 1 & k \end{bmatrix}$ matrisinde k 'nin hangi değerleri için matrisin tersi yoktur?(15 puan)

Çözüm.

Bir matrisinin tersinin olmaması için determinantının 0'a eşit olması gerekir. Yukarıdaki matrisin determinantı:

$$\begin{aligned} & k \begin{vmatrix} k & 5 \\ 1 & k \end{vmatrix} - k \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 1 & k \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 0 & k \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ & = k(k^2 - 5) - k(-5) + 4(-k) \\ & = k^3 - 5k + 5k - 4k \\ & = k^3 - 4k \end{aligned}$$

Bu determinant 0'e eşitlenirse:

$$k^3 - 4k = 0$$

olur. 3. dereceden bu denklemin 3 tane kökü vardır. Bunlar: $0, -2, 2$ değerleridir. O halde k bu üç değerden birini alması halinde matrisin determinanı 0 'a eşit olur. Bu durumda ise matrisin tersi olmaz.