Bilgisayar Destekli Lineer Cebir

Fırat İsmailoğlu, PhD

Lineer Denklem Sistemlerinin Çözümü

Lineer Denklem Sistemi

Elimizde aşağıdaki gibi iki bilinmeyenli iki denklem olsun.

$$x_1 + x_2 = -1$$
$$2x_1 + 3x_2 = 0$$

Birinci denklemi -2 ile çarpıp ikinci denkleme eklediğimizde

$$x_2 = 2$$

olur. Bulunan x_2 değeri birinci yada ikinci denklemde yerine konulursa

$$x_1 = -3$$

elde edilir. Bulunan $(-3, 2)$ ikilisi sistemin çözümüdür.

Alternatif olarak bu denklem sistemini matris – vektör carpımı olacak şekilde gösterebiliriz:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{b}$$

Lineer Denklem Sistemi

Burada A ile gösterilen matrise katsayılar matrisi (coefficent matrix) denir. Sistemin çözümünün olup olmaması bu matrisinin tersinin olup olmamasına bağlıdır. Matrislerin tersini işlerken bu konuya tekrar döneceğiz.

Gauss eliminasyon methoduyla bir lineer denklemi çozerken genel yaklasimimiz ilk olarak katsayılar matrisi (A) ile sonuc vektörunu (b'yi) birlestirerek genisletilmis matris (augmented matrix) olusturmaktır. Bu matrisi $[A\ b]$ olarak göstereceğiz.

Daha sonra bu matrisi baska matrislerle carparak ust ucgen matris haline getirmektir.

Ortaya cikan ust ucgen matrisi kullanarak en son degiskenden ilk degiskene dogru degiskenleri yerine koyma metodu ile buluruz.

ör. $$\left.\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 2 \\ 4x_1 + 9x_2 - 3x_3 &= 8 \\ -2x_1 - 3x_2 + 7x_3 &= 10 \end{aligned}\right\}$$ Lineer denklem sistemini çözünüz.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 9 & -3 \\ -2 & -3 & 7 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 10 \end{bmatrix}}_{b}$$

A matrisi ile b 'yi birlestirerek genisletilmis matris olusturup, bu matrisi ust ucgen matris haline getirecegiz.

$$[A\ b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -2 & 2 \\ 4 & 9 & -3 & 8 \\ -2 & -3 & 7 & 10 \end{array}\right]$$

Bu matrisin ust ucgen olabilmesi icin bu elemanların 0 olması gerekir. (ust uçgen: $i > j$ iken $A_{ij} = 0$)

$$[A\ b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -2 & 2 \\ 4 & 9 & -3 & 8 \\ -2 & -3 & 7 & 10 \end{array}\right]$$ matrisini üst üçgen hale getirirken birim matrislerden faydalanacağız. Modifiye ettiğimiz birim matrisi üst üçgen haline getirmek istediğimiz matrisle soldan carpacagiz. Temel olarak, üst üçgen haline getirmek istediğimiz matriste hangi pozisyondaki elemani 0 yapmak istiyorsak, birim matriste o elemana karşılık gelen elemani modifiye edeceğiz (degistirecegiz).

Örneğin $= \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -2 & 2 \\ 4 & 9 & -3 & 8 \\ -2 & -3 & 7 & 10 \end{array}\right]$ matrisinde 2.satirin 1. elemanini 0 yapalim. Normalde Gaussyan elimanasyonda, bu pozisyonun 0 olabilmesi için birinci satiri -2 ile carpip ikinci satira eklememiz gerekiyordu. Benzer mantıkla, birim matriste 2.satirin 1. elemanini -2 yapacagiz ve bu sekildeki elde edilen birim matrisi:

$$E_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{-2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Bu satır, çarpım sonucunda ilk satırın korunmasını sağlar.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -2 & 2 \\ 4 & 9 & -3 & 8 \\ -2 & -3 & 7 & 10 \end{array}\right]$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -2 & 2 \\ 4 & 9 & -3 & 8 \\ -2 & -3 & 7 & 10 \end{array}\right] =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ -3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -2 & 2 \\ & & & \\ & & & \end{array}\right]$$

Bu satır, çarpım sonucunda birinci satırın -2 katının ikinci satır ile toplanmasını sağlar

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -2 & 2 \\ 4 & 9 & -3 & 8 \\ -2 & -3 & 7 & 10 \end{array}\right]$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -2 & 2 \\ 4 & 9 & -3 & 8 \\ -2 & -3 & 7 & 10 \end{array}\right] =$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ -3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ & & & \end{array}\right]$$

Bu satır, çarpım sonucunda üçüncü satırın korunmasını sağlar

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -2 & 2 \\ 4 & 9 & -3 & 8 \\ -2 & -3 & 7 & 10 \end{array}\right]$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -2 & 2 \\ 4 & 9 & -3 & 8 \\ -2 & -3 & 7 & 10 \end{array}\right] =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ -3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ -2 & -3 & 7 & 10 \end{array}\right]$$

Şimdi amacımız $\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ -2 & -3 & 7 & 10 \end{array}\right]$ matrisinde 3. satırın 1. elemanı 1 yapmaktır. Bunun için E_{31}matrisine karar verip bunu yukarıdaki matrisle soldan çarpacağız. Birinci satırı üçüncü satıra eklemek için üçüncü E_{31} matrisinin üçüncu satırının birinci elemanı 1 olmalıdır. Çünkü bir vektörü $[1 \quad 0 \quad 1]$ vektörü ile çarpmak , bu vektörün birinci ve üçüncü elemanlarini toplamak anlamına gelir. Buna ilaveten biz yukarıdaki matriste birinci ve ikinci satıra dokunmayacağız. O yuzden E_{31}'in ilk iki satiri birim matrisle aynı olacak, değiştirmeyeceğiz.

$$E_{31}= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ -2 & -3 & 7 & 10 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 12 \end{array}\right]$$

Çarpım sonuc elde dilen matrisin bir üst üçgen olması için üçüncü satırının ikinci elemaninin 0 olması gerekir. Bunun için bu matrisle çarpılacak olan E_{32} matrisin ilk iki satırı aynı olmalı, uçuncu satirinin ikinci elemani -1 olmalidir.

$$E_{32}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}\times\left[\begin{array}{ccc|c}2 & 4 & -2 & 2\\ 0 & 1 & 1 & 4\\ 0 & 1 & 5 & 12\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ccc|c}2 & 4 & -2 & 2\\ 0 & 1 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 4 & 8\end{array}\right]$$

Böylece matris üst üçgen bir hale getirlmiştir. Matrisin son satırından

$$4x_3 = 8$$

olup $x_3 = 2$ bulunur. Matrisin ikinci satırından:

$$x_2 + x_3 = 4$$

olup, yukarıda bulunan x_3'un yerine konmasıyla

$$x_2 + 2 = 4$$

olur, buradan $x_2 = 2$ olur. Son olarak bulunan x_2 ve x_3 birinci denklemde yerine konulursa

$$2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 2$$

olup $x_1 = -1$ bulunur. Su halde $x = (-1, 2, 2\ )$ sistemin çözümüdür. Gercekten de eğer bu vektor katsayilar matrisi A ile çarpılırsa b elde edilir:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 9 & -3 \\ -2 & -3 & 7 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 10 \end{bmatrix}}_{b}$$

Ayrıca matris çarpımı özelliklerinden hatırlarsak A, B ve C çarpılabilir üç matris iken

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$$

$[A\ b]$ genişletilmiş matrisini üst üçgen matris haline getirirken sırasıyla E_{21}, E_{31} ve E_{32} matrisleriyle çarpmıştık. Yukarıdaki teoremden

$$\left(E_{32}\left(E_{31}(E_{21}[A\ b])\right)\right) = (E_{32}E_{31}E_{21})[A\ \ b]$$

elde edilir. Yani öncelikle E_{32}, E_{31} ve E_{21} birbirleriyle çarpıp, ortaya çıkan çarpım matrisini $[A\ \ b]$ ile genişletilmiş matrisi ile çarparsak direk ust uçgen matris elde ederiz.

$$(E_{32}E_{31}E_{21}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Yukarıdaki matris $[A \ \ b]$ ile çarpılırsa:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -2 & 2 \\ 4 & 9 & -3 & 8 \\ -2 & -3 & 7 & 10 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \end{array}\right]$$

ör. Başlangıçta gördüğümüz

$$x_1 + x_2 = -1$$
$$2x_1 + 3x_2 = 0$$

lineer denklem sistemini birim matrisler yardimiyla çözelim. Bu sistemi aşağıdaki şekilde matrisler çarpımı şeklinde gösterebiliriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Bu sisteme karşılık gelen genişletilmiş matris:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{array}\right]$$

Bu matrisin üst üçgen olabilmesi için, yalnizca ikinci satirinin ilk elemaninin 0 olamasi yeterlidir. Bu matris ile çarpıldığında ilk satıra dokunmayıp, ikinci satıra birinci satırın -2 katını ekleyen matris aşağıdaki gibi olur:

$$E_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \times \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Son satırdan $x_2 = 2$ olur. Bu değer ilk denklemde yerine konulursa:

$$x_1 + x_2 = -1$$
$$x_1 + 2 = -1$$
$$x_1 = -3.$$

ör. $2x_1 + x_2 + 3x_3 = 1$ Lineer denklem sistemini çözelim.

$$2x_1 + 6x_2 + 8x_3 = 3$$

$$6x_1 + 8x_2 + 18x_3 = 5$$

Bu sisteme ait genişletilmiş katsayılar matrisini $\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 8 & 3 \\ 6 & 8 & 18 & 5 \end{array}\right]$ olur. Bu matrisi üst üçgen matris haline getirmek için aşağıdaki işlemleri yapalım

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 8 & 3 \\ 6 & 8 & 18 & 5 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 5 & 2 \\ 6 & 8 & 18 & 5 \end{array}\right]$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 5 & 2 \\ 6 & 8 & 18 & 5 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 5 & 2 \\ 0 & 5 & 9 & 2 \end{array}\right]$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \times \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 5 & 2 \\ 0 & 5 & 9 & 2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right]$$

Matrisin son satirindan $x_3 = 0$ bulunur. Matrisin ikinci satırından $5x_2 + 5 \cdot 0 = 2$ olup $x_2 = \frac{2}{5}$ bulunur. Matrisin ilk satirindan $2x_1 + \frac{2}{5} + 3 \cdot 0 = 1$ olup $x_1 = \frac{3}{10}$ elde edilir.

Elementer Satır İşlemleriyle Lineer Denklem Sistemi Çözümü

Lineer denklem sistemlerini elementer satır işlemleriyle de çözebiliriz. Bu işlemler şunlardır:

Elementer Satır İşlemleri (Elementary Row Operations)

1. İki denklemin yerini değistirmek: verilen bir lineer denklem sisteminde herhangi iki denklem birbirleriyle yer değiştirebilir. Notasyon olarak örneğin eğer i. denklem ile j. denklem yer değistirmisse, bunu

$$R_i \leftrightarrow R_j$$

ile göstereceğiz.

2. Bir denklemi bir sayı (bir skaler) ile çarpmak: verilen bir lineer denklem sisteminde herhangi bir denklemi herhangi bir sayı ile çarpabiliriz. Notasyon olarak eğer i. denklem k gibi bir skalerle çarpılmışssa bu,

$$R_i \leftarrow kR_i$$

ile gösterilir.

3. İki denklemi (birer skalerle çarpıp) toplayarak elde edilen yeni denklemi toplanan denklemlerden biri ile yer değiştirmek: sistemde herhangi iki denklemi skalelerle çarpıp (yada çarpmayıp) toplayabiliriz. Ortaya çıkan yeni denklemi toplama katılan denklemlerden birinin yerine yazabiliriz. Notasyon olarak diyelimki i. denklemi k sklaeriyle, j. denklemi ise m skaleriyle çarpıp iki denklemi toplayalım, ortaya çıkan denklemi j. denklemle yer değiştirelim. Bunu

$$R_j \leftarrow kR_i + mR_j$$

ile göstereceğiz.

Burada önemli nokta, bahsedilen elemeneter satır işlemleri sonucunda siteminin çözümünün değişmediğidir.

Satır Eşelon Form (Row Echelon Form)

Bir lineer denklem sistemi elementer satır işlemleri yardımıyla çözerken, bu işlemleri kullanarak genişletilmiş matrisi ($[A\ b]$) 'satır eşelon form' a getiririz. Bu kavramı anlamak öncelikle pivot kavramının tanımını yapalım.

Pivot (Öncü Eleman)

Matriste bir satırın pivotu o satırda 0'dan farklı ilk elemandır.

ör. $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ Pivotlar

Satır Eşelon Form (Row Echelon Form)

Bir matrisin satır eşelon formda olması için şu şartların tamamını sağlaması gerekir:

1. Her pivot bir onceki satırın pivotunun altında ve sağında yer almalıdır.
2. Pivotların altı 0 yapılmalıdır.
3. Matriste tamamı 0'dan oluşan elemanlar matrisin en altında yer almalıdır.

Not: Satır eşelon formda genelde pivotlar 1 yapılır.

ör. Satır eşelon formda olan matris örnekleri

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ör. Aşağıdaki lineer denklem sistemini genişletilmiş katsayılar matrisini elementer satır işlemleriyle satır eşelon forma getirerek çözünüz.

$x_1 + 2x_2 - x_3 = 1$
$2x_1 + x_2 + 4x_3 = 2$
$3x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & 3 & 4 & 1 \end{array}\right] \underset{\equiv}{R_2 \leftarrow -2R_1 + R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 6 & 0 \\ 3 & 3 & 4 & 1 \end{array}\right]$$

$$\underset{\equiv}{R_3 \leftarrow -3R_1 + R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 6 & 0 \\ 0 & -3 & 7 & -2 \end{array}\right] \underset{\equiv}{R_2 \leftarrow (-\frac{1}{3})R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 7 & -2 \end{array}\right]$$

birinci pivotun
altı 0 yapıldı

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 7 & -2 \end{array}\right] \underset{\equiv}{R_3 \leftarrow 3R_2 + R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

Katsayılar matrisi satır eşelon forma geldiğinden elementer satır işlemlerini burada sonlandırıp yerine koyma methoduyla x_3, x_2 ve x_1 değerlerini bulabiliriz. Ama istersek de yine elementer satır işlemlerini kullanarak pivotların üstünü de 0 yapabiliriz. Böylece x_1, x_2 ve x_3 değerleri direkt ortaya çıkar.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \underset{\equiv}{R_1 \leftarrow -2R_2 + R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

$$\underset{\equiv}{R_2 \leftarrow 2R_3 + R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \underset{\equiv}{R_1 \leftarrow -3R_3 + R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$ Bu matristen $x_3 = -2$, $x_2 = -4$ ve $x_1 = 7$ bulunur.

ör. Aşağıdaki lineer denklem sistemini genişletilmiş katsayılar matrisini elementer satır işlemleriyle satır eşelon forma getirerek çözünüz.

$$3x_2 - 6x_3 + 6x_4 + 4x_5 = -5$$
$$3x_1 - 7x_2 + 8x_3 - 5x_4 + 8x_5 = 9$$
$$3x_1 - 9x_2 + 12x_3 - 9x_4 + 6x_5 = 15$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \end{array}\right] \underset{\equiv}{R_1 \leftrightarrow R_3} \left[\begin{array}{ccccc|c} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \end{array}\right]$$

$$\underset{\equiv}{R_2 \leftarrow R_2 - R_1} \left[\begin{array}{ccccc|c} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 2 & -6 \\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \end{array}\right] \underset{\equiv}{\begin{array}{c} R_2 \leftarrow 3R_2 \\ R_3 \leftarrow 2R_3 \end{array}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 0 & 6 & -12 & 12 & 6 & -18 \\ 0 & 6 & -12 & 12 & 8 & -10 \end{array}\right]$$

$$R_3 \leftarrow R_3 - R_2 \equiv \left[\begin{array}{ccccc|c} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 0 & 6 & -12 & 12 & 6 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 8 \end{array}\right]$$

$$R_1 \leftarrow R_1 \cdot \frac{1}{3}$$

$$R_2 \leftarrow R_2 \cdot \frac{1}{6}$$

$$R_3 \leftarrow R_3 \cdot \frac{1}{2} \equiv \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & 4 & -3 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

Yukarıda satır eşolon forma gelmiş matristen:

$$x_5 = 4$$
$$x_2 - 2x_3 + 2x_4 + x_5 = -3$$
$$x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 5$$

$x_5 = 4,$ ikinci ve ucuncu denklemde yerine konulurusa:

$$x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -7$$
$$x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 = -3$$

elde edilir. Birinci denklemde x_2 yalnız bırakılırsa:

$$x_2 = -7 + 2x_3 - 2x_4$$

olur. Bu değer ikinci denklemde yazılırsa:

$$x_1 - 3(-7 + 2x_3 - 2x_4) + 4x_3 - 3x_4 = -3$$
$$x_1 = 2x_3 - 3x_4 - 24$$

olur. Sistemin çözüm kümesi:

$$x_1 = 2x_3 - 3x_4 - 24$$
$$x_2 = -7 + 2x_3 - 2x_4$$
$$x_5 = 4$$

Burada x_3 ve x_4 bağımsız değişkendir, her değeri alabilir. x_1 ve x_2 bağımlı değişkendir, x_3 ve x_4 'e bağımlıdır. Örneğin, x_3 ve x_4 'ü 1 alırsak, $x_1 = -25$, $x_2 = -7$, olur. $(-25, -7, 1, 1, 4)$ sistemin bir çözümü olur.

x_3 ve x_4 ‘e farklı değerler vererek sonsuz çözüm elde edebiliriz.

ör. Lineer denklem sisteminin bir uygulaması olarak kimyasal tepkimeleri düşünebiliriz. Genel olarak bir kimyasal tepkimede tepkimeye giren molekül sayısı ile tepkimeden çıkan molekül sayıları aynı olmak zorundadır.

Buna göre aşağıda gösterilen kimyasal tepkimede tepkimeye giren ve çıkan molekuller hangi oranda alınmalıdır?

$$\mathrm{C_2H_6} + \mathrm{O_2} \rightarrow \mathrm{CO_2} + \mathrm{H_2O}$$

Çözüm.

$$a(\mathrm{C_2H_6}) + b(\mathrm{O_2}) \rightarrow c(\mathrm{CO_2}) + d(\mathrm{H_2O})$$

Denkleme giren karbon sayıları eşit olmak zorunda olduğundan: $2a = c$

Denkleme giren hidrojen sayıları eşit olmak zorunda olduğundan: $6a = 2d$

Denkleme giren oksijen sayıları eşit olmak zorunda olduğundan: $2b = 2c + d$

Buradan aşağıdaki lineer denklem sistemi elde edilir.

$$2a - c = 0$$
$$6a - 2d = 0$$
$$2b - 2c - d = 0$$

Denklem sistemine ait genişletilmiş katsayılar matrisini elementer satır işlemleriyle satır eşelon forma getirelim.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right] \overset{R_2 \leftarrow -3R_1 + R_2}{\equiv} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\overset{R_2 \leftrightarrow R_3}{\equiv} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

Satır eşelon forma getirilmis matrisin son satırından:

$$3c - 2d = 0$$
$$c = \frac{2d}{3}$$

Buradan aşağıdaki lineer denklem sistemi elde edilir.

$$2a - c = 0$$
$$6a - 2d = 0$$
$$2b - 2c - d = 0$$

Denklem sistemine ait genişletilmiş katsayılar matrisini elementer satır işlemleriyle satır eşelon forma getirelim.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right] \underset{\equiv}{R_2 \leftarrow -3R_1 + R_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\underset{\equiv}{R_2 \leftrightarrow R_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

Satır eşelon forma getirilmis matrisin son satırından:

$$3c - 2d = 0$$
$$c = \frac{2d}{3}$$

Satır eşelon forma getirilmis matrisin ikinci satırından:

$$2b - 2c - d = 0$$

$$b = \frac{7d}{6}$$

Satır eşelon forma getirilmis matrisin birinci satırından:

$$2a - c = 0$$

$$a = \frac{d}{3}$$

Burada d bağımsız değiskendir; a, b ve c degiskenleri ise d'ye bağlı bağımlı degiskenlerdir.

$\begin{bmatrix} d/3 \\ 7d/6 \\ 2d/3 \\ d \end{bmatrix}$ sistemin çözümüdür.

Lineer Denklem Sisteminin Çözümünün Varlığı

Elimizde iki bilinmeyenli iki denklem olsun:

$$ax + by = c$$
$$dx + ey = f$$

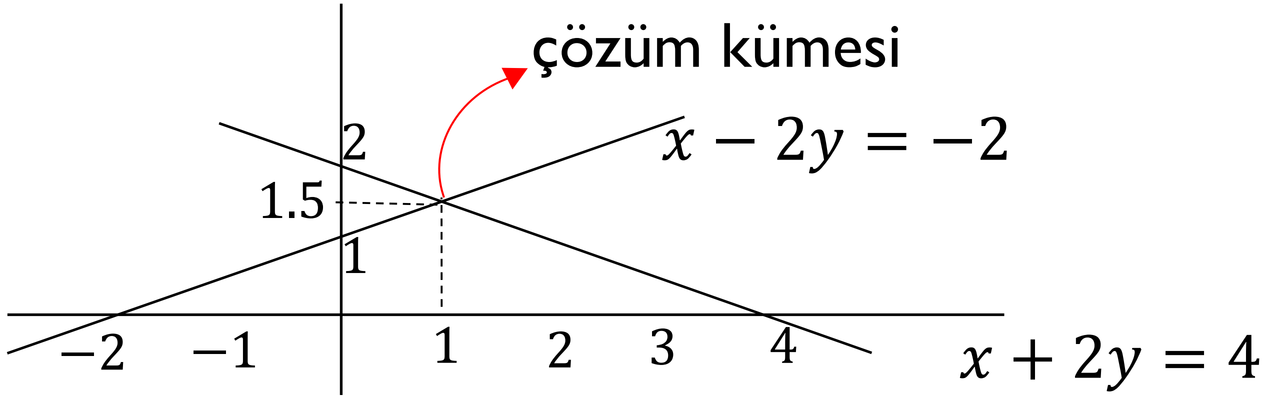
Bu denklemler $\mathbb{R}^2$ de birer doğru ile gösterilebilirler. Bu doğruların birbirlerine göre 3 durumu vardır. Bu 3 duruma göre sistemin çözümünün var olup olmadığından söz edebiliriz.

1. İki doğru tek bir noktada kesişebilir. Bu durumda sistem tutarlıdır (consistent) ve sistemin tek bir çözümü vardır. Denklemler birbirinden bağımısızdır (birbirlerinden türetilemezler).

ör. $x - 2y = -2$ ve $x + 2y = 4$ olarak verilen lineer denklem sisteminin çözümünün var olup olmadığına bakalım.

$x - 2y = -2$ denkleminin doğrusu $(0,1)$ ve $(-2,0)$ noktalarından geçer.

$x + 2y = 4$ denkleminin doğrusu $(0,2)$ ve $(4,0)$ noktalarından geçer.



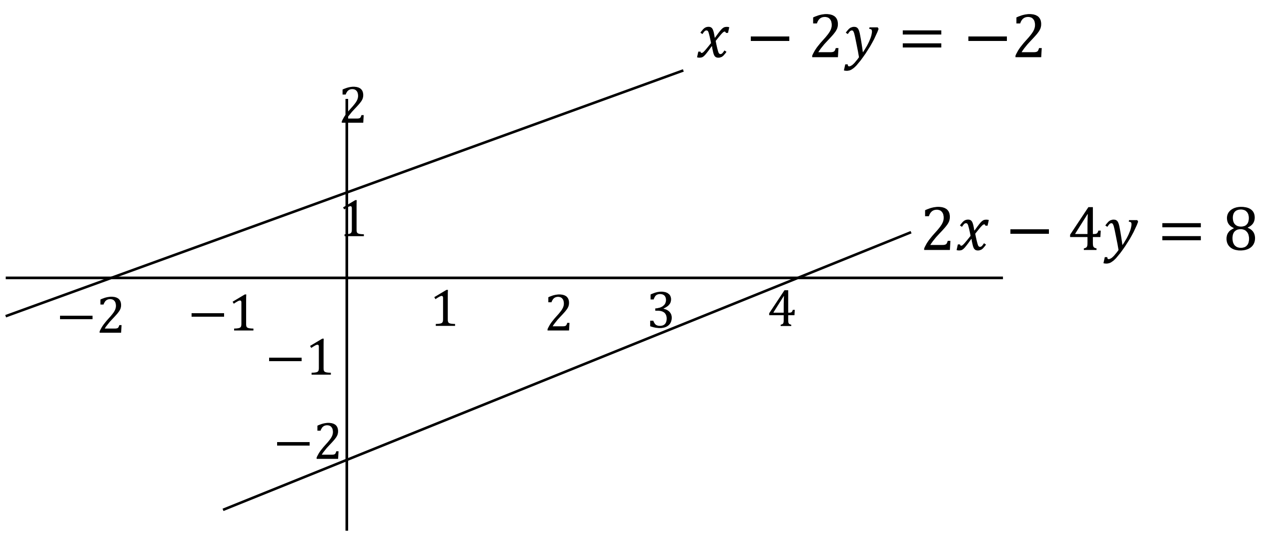
Sistemin çözüm kümesi doğruların kesişme noktasıdır.

2 . İki doğru hiçbir noktada kesişmez. Bu durumda doğrular birbirine paraleldir. Sistem tutarsızdır (inconsistent). Çözüm yoktur.

ör. $x - 2y = -2$ ve $2x - 4y = 8$ olarak verilen lineer denklem sisteminin çözümünün var olup olmadığına bakalım.

$x - 2y = -2$ denkleminin doğrusu $(0,1)$ ve $(-2,0)$ noktalarından geçer.

$2x - 4y = 8$ denkleminin doğrusu $(0,-2)$ ve $(4,0)$ noktalarından geçer.



Doğrular birbirine paralel. Çözüm yok.

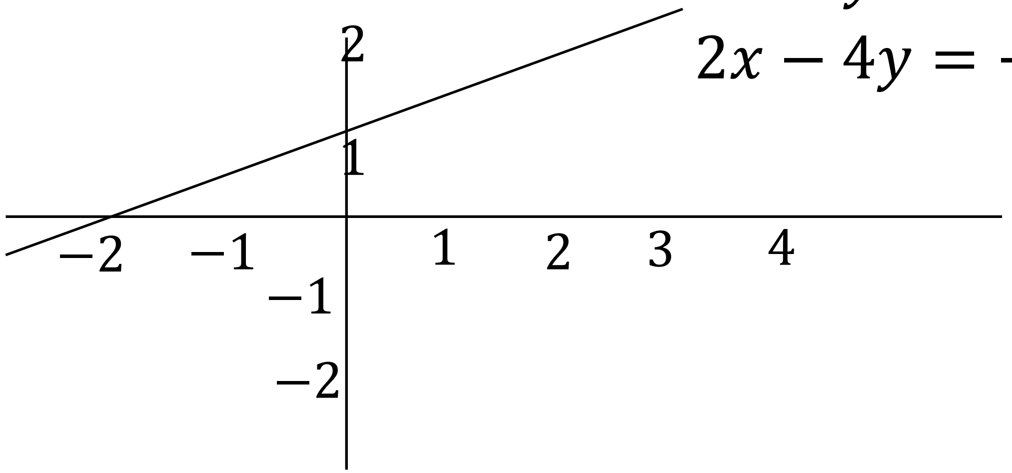
3 . İki doğru her noktada kesişir. Bu durumda doğrular çakışır. Sistemin sonsuz çözümü vardır. Denklemler biribirinden elde edilmiştir. Denklemler biribirlerine bağımlıdırlar.

ör. $x-2y=-2$ ve $2x-4y=-4$ olarak verilen lineer denklem sisteminin çözümünün var olup olmadığına bakalım.

$x-2y=-2$ denkleminin doğrusu $(0,1)$ ve $(-2,0)$ noktalarından geçer.

$2x-4y=-4$ denkleminin doğrusu $(0,1)$ ve $(-2,0)$ noktalarından geçer.

Dolayısiyla bu iki doğru tam olarak çakışır.



$$x - 2y = -2$$
$$2x - 4y = -4$$

Tek bir doğru var. Bu doğru üzerindeki her nokta sistemin çözümüdür. Bu doğru uzerindeki her nokta birinci denklemi de saglar, ikinci denklemi de sağlar. Dolayisiyla sonsuz çözüm vardır.