Bilgisayar Destekli Lineer Cebir

Fırat İsmailoğlu, PhD

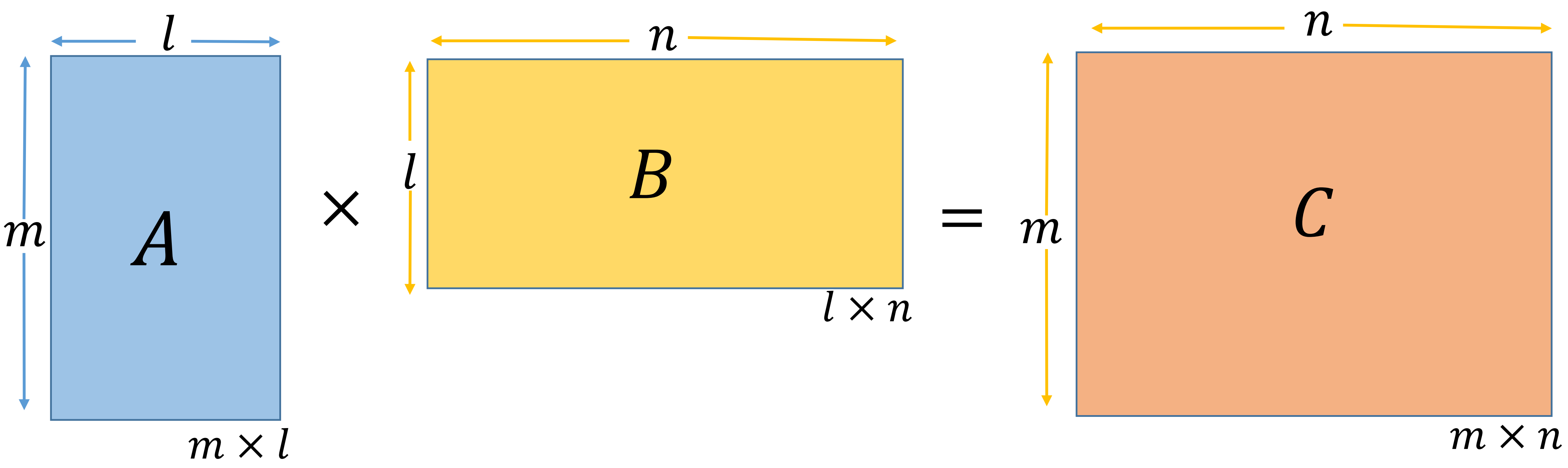
Hafta 7: Matrisler II

MATRİS – MATRİS ÇARPIMI

Iki matrisin carpilabilir olmasi için birinci matrisin sutun sayisi ile ikinci matrisin satır sayisi eşit olmalidir.

$A \in \mathbb{R}^{m \times l}$ ve $B \in \mathbb{R}^{l \times n}$ iki matris olsun. Bu matrisler çarpılabilir. Çünkü A'nın l tane sutunu vardır ve bu sayı B'nin satır sayısı olan l'ye esittir.

Bu iki matrisin carpimiyla ortaya cikan C matrisi $m \times n$ boyutundadır.



MATRİS – MATRİS ÇARPIMI

Çarpım Kural: $A \in \mathbb{R}^{m \times l}$ ve $B \in \mathbb{R}^{l \times n}$ iken $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$' in j. sütunu ($j \in \{1, \dots, n\}$) A matrisinin kendisi ile B matrisinin j. sütununun matris - vektör çarpımıdır.

Diyelimki $C_{.j}$; C matrisinin j. sütununu göstersin. Şu halde

$$\boxed{C_{.j} = A \cdot B_{.j}}$$

olur.

MATLAB Kodu

```
[m,l]=size(A);
[l,n]=size(B);
C = zeros(m,n);
for j = 1:n %sutunlari tarıyoruz
    C(:,j)= A*B(:,j);
end
```

Yukarıdaki MATLAB koduna dikkat edilirse **`A*B(:,j)`** çarpımı bir matris – vektör carpimidir. Bu çarpimi A'nin satirlarını B'nin **`j`**. kolonu ile carparak yapabiliriz. Bu carpimlarin her birine karsilik C'nin **`j`**. kolonun bir elemani karşılık gelir.

Kod yeniden duzenlenirse:

```
[m,l]=size(A);
[l,n]=size(B);
C = zeros(m,n);
for j = 1:n %sutunlari tarıyoruz
    for i = 1:m %satirlari tariyoruz
        C(i,j)= A(i,:)*B(:,j);
    end
end
```

Sonuç: C_{ij} yani C'nin i. satirinin j. kolonu A'nın i. satırı ile B'nin j. sutunun carpımi ile bulunur.

ör. $\begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 4} \times \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 3 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}_{4\times 2} =$

$$\begin{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}}_{\text{çarpımın 1. sutunu}} & \underbrace{\begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\text{çarpımın 2. sütunu}} \end{bmatrix}_{4\times 2}$$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\begin{bmatrix}-3 & 2 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\1\\3\\-1\end{bmatrix}}{} & \dfrac{\begin{bmatrix}-3 & 2 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\2\\3\\1\end{bmatrix}}{} \\ \dfrac{\begin{bmatrix}0 & 4 & 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\1\\3\\-1\end{bmatrix}}{} & \dfrac{\begin{bmatrix}0 & 4 & 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\2\\3\\1\end{bmatrix}}{} \\ \begin{bmatrix}2 & -2 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\1\\3\\-1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}2 & -2 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\2\\3\\1\end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3\cdot -1 + 2\cdot 1 + 0\cdot 3 + 1\cdot -1 & -3\cdot 0 + 2\cdot 2 + 0\cdot 3 + 1\cdot 1 \\ 0\cdot -1 + 4\cdot 1 + 1\cdot 3 + -1\cdot -1 & 0\cdot 0 + 4\cdot 2 + 1\cdot 3 + -1\cdot 1 \\ 2\cdot -1 + -2\cdot 1 + 1\cdot 3 + 0\cdot -1 & 2\cdot 0 + -2\cdot 2 + 1\cdot 3 + 0\cdot 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 8 & 10 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

ör. Diyelim ki A ve B gibi iki universite olsun. A universitesi 25 monitor, 5 lazer yazici ve 20 projeksiyon cihazi alacak olsun. B univeristesi ise 35 monitor, 3 lazer yazici ve 15 projeksiyon cihazi alacak olsun. Ayrica 2 tane satici olsun. Birinci saticida monitor, lazer yazici ve projeksiyon cihazlarinin birim fiyati sirasiyla 1286 TL, 399 TL 1110 TL; ikinci saticida bu urunlerin birim fiyati sirasiyla 1210, 380 ve 1216 TL dir.

Bu durumda hangi universite hangi saticadan urunleri satin almalidir?

Çözüm.

Üniversite – ürün matrisi:

$$\begin{array}{l} \\ \text{Üniversite A} \\ \text{Üniversite B} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Monitör} & \text{L.Yazıcı} & \text{Projeksiyon} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 25 & 5 & 20 \\ 35 & 3 & 15 \end{bmatrix}_{\text{uni x ürün}} \end{array}$$

Ürün – satıcı matrisi:

$$\begin{array}{l} \\ \text{Monitör} \\ \text{L.Yazıcı} \\ \text{Projeksiyon} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{Satıcı 1} & \text{Satıcı 2} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1286 & 1210 \\ 399 & 380 \\ 1110 & 1216 \end{bmatrix}_{\text{ürün x satıcı}} \end{array}$$

(Üniversite – ürün matrisi) x (Ürün – satıcı matrisi) =

$$\begin{array}{l} \\ \text{Üniversite A} \\ \text{Üniversite B} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{Satıcı 1} & \text{Satıcı 2} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 56345 & 56470 \\ 62857 & 61730 \end{bmatrix}_{\text{uni x satıcı}} \end{array}$$

Özel Matris – Matris Çarpımları

1. İki Reel Sayının Çarpımı

$A \in \mathbb{R}^{1\times 1}$ ve $B \in \mathbb{R}^{1\times 1}$ iken $A \cdot B = C \in \mathbb{R}^{1\times 1}$ olur. Yani iki reel sayının çarpımı aslında 1×1 boyutlu iki matrisin çarpımına eşittir.

$$1\left\{\overbrace{\boxed{A}}^{1}\right. \times 1\left\{\overbrace{\boxed{B}}^{1}\right. = 1\left\{\overbrace{\boxed{C}}^{1}\right.$$

2. İki Vektörün İç Çarpımı (Nokta Çarpım)

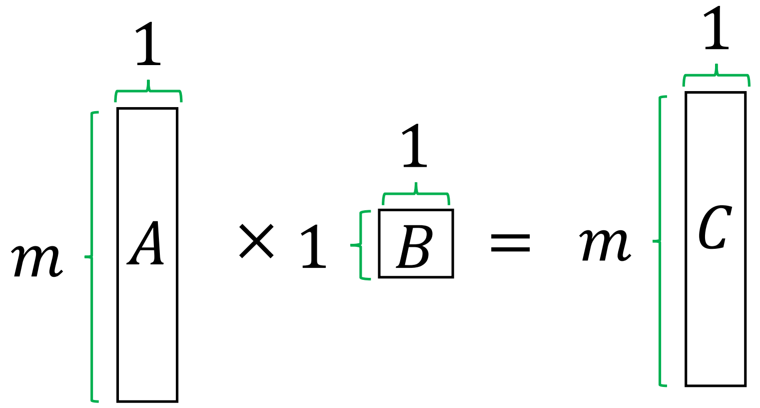
$A \in \mathbb{R}^{1\times l}$ 1 satıra l sutuna sahip bir matris ve $B \in \mathbb{R}^{l\times 1}$ l satıra 1 sutuna sahip bir matris olsun. Bu durumda $A \cdot B$ matrisi 1×1 boyutlu olur. Hatta bu carpım A ve B matrislerinin iç çarpımıdır.

$$1\left\{\underbrace{\boxed{\qquad\qquad A \qquad\qquad}}_{l}\right. \times l\left\{\overbrace{\boxed{\begin{matrix} \\ \\ B \\ \\ \\ \end{matrix}}}^{1}\right. = 1\left\{\overbrace{\boxed{C}}^{1}\right.$$

Özel Matris – Matris Çarpımları

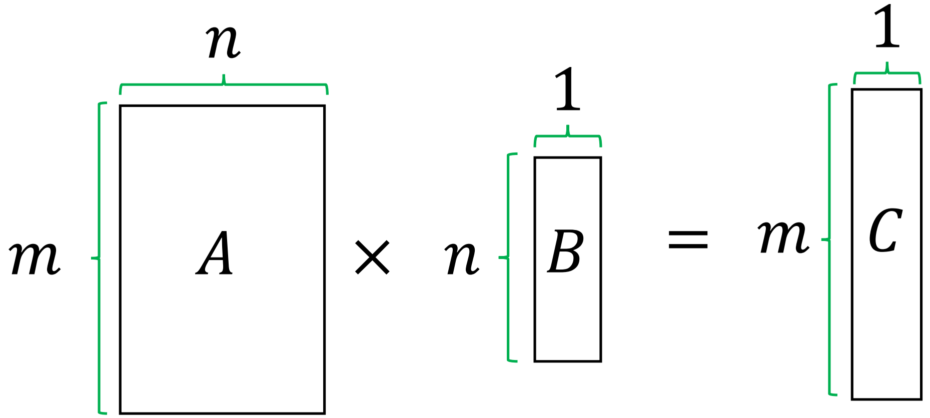
3.Vektör – Skaler Çarpımı

$A \in \mathbb{R}^{m\times 1}$ ve $B \in \mathbb{R}^{1\times 1}$ iken $A \cdot B = C \in \mathbb{R}^{m\times 1}$ olur. Bu, daha önce gördügümüz vektör- skaler çarpımıdır, vektörun elemanlarinin skalerle carpilmasiyla elde edilir.



4. Matris – Vektör Çarpımı

$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ve $B \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ iken $A \cdot B = C \in \mathbb{R}^{m\times 1}$ olur. Bu daha önce gördügümüz matris – vektör çarpımıdır.



Matris – Matris Çarpımının Maliyeti

$A \in \mathbb{R}^{m \times l}$ ve $B \in \mathbb{R}^{l \times n}$ matrisler olsun. $A \cdot B = C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ matrisinin i. satırının j. elemanı C_{ij}; A'nın i. satırı $(A_{i.})$ ile B'nin j. sütunun $(B_{.j})$ iç çarpımından oluşur.

$$C_{ij} = \boxed{\quad A_{i.} \quad} \times \boxed{B_{.j}}$$

Bu iç çarpım l tane çarpımın toplamından oluşur. O halde bu iç çarpım için $2 \cdot l$ tane işlem gerekir (iç çarpımın maliyeti $2 \cdot l$ dir, çünkü l adet çarpım ve l adet toplam yapmamız gerekir).

C matrisinin her bir bileşenini hesaplamak için $2 \cdot l$ tane işlem yapmak gerekidir.

C matrisinin toplam bileşen sayısı $m \cdot n$ dir. O halde C matrisini hesaplamak için gereken işlem sayısı:

$$2 \cdot l \cdot m \cdot n$$

olur.

Matris İle Tranpozunun Carpimi

Bir matris ile bu matrisin transpozu carpildiginda matris ne olursa olsun kare ve simetrik bir matris elde edilir.

Bunu kolayca gösterebilmek icin ornek olarak 3 satirdan olusan bir A matrisini alalım ve bu matrisin satırlarını $\mathrm{R1}$, $\mathrm{R2}$ ve $\mathrm{R3}$ ile gösterelim.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathrm{R1}\text{———} \\ \mathrm{R2}\text{———} \\ \mathrm{R3}\text{———} \end{bmatrix}}_{A} \times \underbrace{\begin{array}{ccc} \mathrm{R1} & \mathrm{R2} & \mathrm{R3} \\ \hline \multicolumn{3}{c}{\begin{bmatrix} | & | & | \\ | & | & | \\ | & | & | \end{bmatrix}} \end{array}}_{A^T} = \underbrace{\begin{bmatrix} R1R1 & R1R2 & R1R3 \\ R2R1 & R2R2 & R2R3 \\ R3R1 & R3R2 & R3R3 \end{bmatrix}}_{AA^T}$$

Bir matrisin transpozu ile kendinin çarpımını göstermek için ornek olarak 3 sütundan olusan bir A matrisini alalım ve bu matrisin sütunlarını $\mathrm{K1}$, $\mathrm{K2}$ ve $\mathrm{K3}$ ile gösterelim.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} K1\text{———} \\ K2\text{———} \\ K3\text{———} \end{bmatrix}}_{A^T} \times \underbrace{\begin{array}{ccc} \mathrm{K1} & \mathrm{K2} & \mathrm{K3} \\ \hline \multicolumn{3}{c}{\begin{bmatrix} | & | & | \\ | & | & | \\ | & | & | \end{bmatrix}} \end{array}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} K1K1 & K1K2 & K1K3 \\ K2K1 & K2K2 & K2K3 \\ K3K1 & K3K2 & K3K3 \end{bmatrix}}_{A^TA}$$

Matris – Matris Çarpımının Transpozu

Teorem: $A \in \mathbb{R}^{m\times l}$ ve $B \in \mathbb{R}^{l\times n}$ matrisler olsun. Bu durumda

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

olur. Yani çarpımın transpozu; çarpanların transpozlarının çarpımına eşitttir.

İspat:

Iki matrisin eşit olmasi demek matrislerin tum bileşenlerinin ayni olmasi demektir. Buradan hareketle eşitliğin her iki tarafindaki matrislerin esit oldugunu ispatlamak icin eşitligin bir tarafindaki matrisin herhangi bir bileşenini ele alalım. Bu i. satır j. sutuna denk gelen bileşen olsun.

$(AB)^T_{ij}$, tranpozu olan AB matrisinin j. satırının i. sütunundaki bileşene eşittir:

ise A matrisinin j. satırının B'nin i. sutunu ile çarpımından elde edilir.

A matrisinin j. satırı, A^T matrisinin j. sütunu; B matrisinin i. sutunu B^T matrisinin i. satırıdır. Şu halde bu bileşen B^T matirisi ile A^T matrisinin i. satırının j. sütunundaki bileşene eşittir.

Birim (Identity) Matris ile Çarpım

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ bir matris I_n, $n \times n$ birim matris olsun. Bu durumda

$$A \cdot I_n = A$$

$$I_n \cdot A = A$$

olur. Yani birim matris matris-matris çarpıminin etkisiz elemanidir.

ör. $\begin{bmatrix} -1 & 4 & 9 \\ 11 & 3 & 8 \end{bmatrix}_{2\times 3} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 3} = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 9 \\ 11 & 3 & 8 \end{bmatrix}_{2\times 3}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 3} \times \begin{bmatrix} -1 & 4 & 9 \\ 11 & 3 & 8 \end{bmatrix}_{2\times 3} = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 9 \\ 11 & 3 & 8 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

Aşağidakı matris – vektör carpimlarini yapınız.

$$\begin{bmatrix} -1 & 4 & 9 \\ 11 & 3 & 8 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 4 & 9 \\ 11 & 3 & 8 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 4 & 9 \\ 11 & 3 & 8 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

Dış Çarpım (Outer Product) (Cross Product)

Dış çarpım, iki vektörü çarpmanın bir başka türüdür.

u, m – boyutlu bir sütun vektörü olsun ($u \in R^{m\times 1}$) .

v, n – boyutlu bir satır vektörü olsun ($u \in R^{1\times n}$) .

Şu halde $u \cdot v$ bir dış çarpımdır ve bu çarpım sonucunda $m \times n$ boyutunda bir matris oluşur.

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_m \end{bmatrix}_{m\times 1}, v = [v_1, v_2, \dots, v_n]_{1\times n}$$ vektörlerinin dış çarpımı:

$$u \cdot v = \begin{bmatrix} u_1 \cdot v_1 & u_1 \cdot v_2 & \dots & u_1 \cdot v_n \\ u_2 \cdot v_1 & u_2 \cdot v_2 & \dots & u_2 \cdot v_n \\ \dots & \dots \dots \dots & \dots \dots \dots & \dots \\ u_m \cdot v_1 & u_m \cdot v_2 & \dots & u_m \cdot v_n \end{bmatrix}_{m\times n}$$

Dış Çarpım (Outer Product) (Cross Product)

ör. $u = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}_{4\times 1}, v = [4, 2]_{1\times 2}$ vektörlerinin dış çarpımı:

$$u \cdot v = \begin{bmatrix} 1\cdot 4 & 1\cdot -2 \\ -1\cdot 4 & -1\cdot 2 \\ 0\cdot 4 & 0\cdot 2 \\ 3\cdot 4 & 3\cdot 2 \end{bmatrix}_{4\times 2} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -4 & -2 \\ 0 & 0 \\ 12 & 6 \end{bmatrix}_{4\times 2}$$

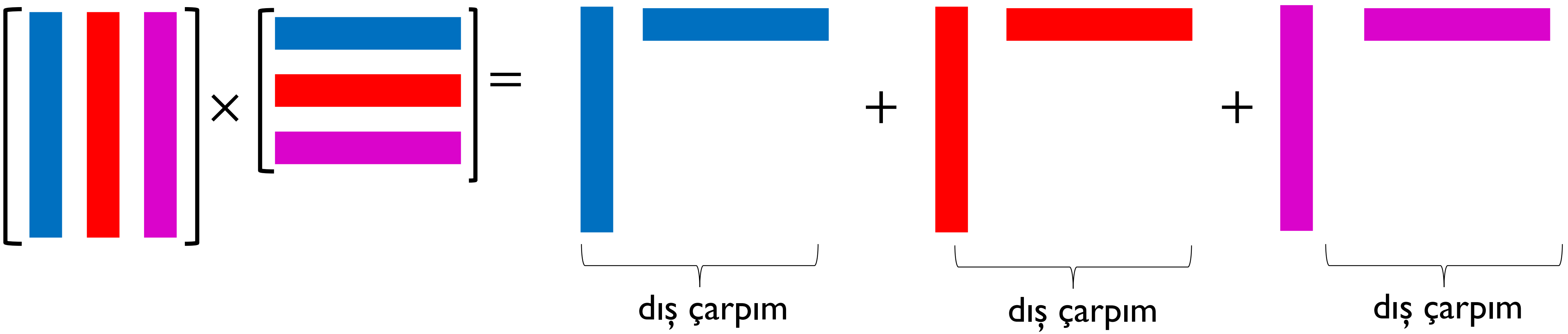
Dış Çarpımın Özellikleri

1. Dış çarpım sonucunda iç çarpımın aksine sayı degil bir matris oluşur.

2. Vektörlerin dış çarpımı yapılırken vektörlerin aynı boyutlu olması zorunlu değildir. Herhangi iki vektörün dış çarpımı her zaman mevcuttur.

Matris – Matris Çarpımının Vektör Dış Çarpımıyla Yapılması

A'nın sütünları ile B'nın satırlarını sıra ile dış çarpım ile çarpıp ortaya çıkan matrisleri toplayarak $A \cdot B$ matris çarpımını elde edebiliriz.



Formal olarak:

$A_1, A_2, \dots, A_l$ A'nın sütünlarını göstersin. $\tilde{B}_1, \tilde{B}_2, \dots, \tilde{B}_l$ B'nin satırlarını göstersin.

$$C = \left[A_1 \middle| A_2 \middle| \dots \middle| A_l \right] \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ \hline \tilde{B}_2 \\ \hline \dots \\ \hline \tilde{B}_l \end{bmatrix} = [A_1 \ \tilde{B}_1] + [A_1 \ \tilde{B}_1] + \cdots + [A_l \ \tilde{B}_l]$$

ör.

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 4} \times \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 3 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}_{4\times 2} =$$

$$\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -3\cdot -1 & -3\cdot 0 \\ 0\cdot -1 & 0\cdot 0 \\ 2\cdot -1 & 2\cdot 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\cdot 1 & 2\cdot 2 \\ 4\cdot 1 & 4\cdot 2 \\ -2\cdot 1 & -2\cdot 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0\cdot 3 & 0\cdot 3 \\ 1\cdot 3 & 1\cdot 3 \\ 1\cdot 3 & 1\cdot 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1\cdot -1 & 1\cdot 1 \\ -1\cdot -1 & -1\cdot 1 \\ 0\cdot -1 & 0\cdot 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 8 & 10 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

MATLAB Kodu

Birinci matrisin sütunlarini, ikinci matrisin satirlarını gezmek için bir degiskene ihtiyacimiz var. Bu i degiskeni olsun.

i degiskenin her degeri icin birinci matrisin bir sutunu ile ikinci matrisin bir satiri dış çarpilir.

Bu dış çarpım sonucunda bir matris oluşur. Elde edilen matris bir once elde edilen matrise eklenerek çarpım güncellenir.

```
[m,l]=size(A);
[l,n]=size(B);
C = zeros(m,n);
for i = 1:l %sutunlari tarıyoruz
    C = C + A(:,i)*B(i,:);
end
```

Matris Çarpının Cebirsel Özellikleri

1. $A, m \times n$ boyutunda; $B, n \times k$ boyutunda ve $C, k \times l$ boyutunda matris olsun. Bu durumda aşağıda gösterilen birleşme özelliği sağlanır.

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$$

İspat:

Diyelim ki $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$ ve $C = \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix}$ gibi 2×2 matrisler olsunlar. Bu durumda

$$B \cdot C = \begin{bmatrix} ei + fk & ej + fl \\ gi + hk & gj + hl \end{bmatrix}$$

olur. A ile $B \cdot C$ çarpılırsa:

$$A \cdot (B \cdot C) = \begin{bmatrix} aei + afk + bgi + bhk & aej + afl + bgj + bhl \\ cei + cfk + dgi + dhk & cej + cfl + dgj + dhl \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} aei + bgi + afk + bhk & aej + bgj + afl + bhl \\ cei + dgi + cfk + dhk & cej + dgj + cfl + dhl \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix}$$

$$= (A \cdot B) \cdot C$$

2 . $A, m \times n$ boyutunda; B ve C matrisleri , $n \times k$ boyutunda matrisler olsunlar. Bu durumda aşagidaki sekilde carpmanin toplama uzerine soldan dagilma ozelligi vardir:

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

İspat:

Benzer şekilde diyelim ki $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$ ve $C = \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix}$ gibi 2×2 matrisler olsunlar. Bu durumda $B + C$:

$$= \begin{bmatrix} e+i & f+j \\ g+k & h+l \end{bmatrix}$$

olur. $A \cdot (B + C) =$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e+i & f+j \\ g+k & h+l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae+ai+bg+bk & af+aj+bh+bl \\ ce+ci+dg+dk & cf+cj+dh+dl \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ae + bg + ai + bk & af + bh + aj + bl \\ ce + dg + ci + dk & cf + dh + cj + dl \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ai + bk & aj + bl \\ ci + dk & cj + dl \end{bmatrix}$$

$$= A \cdot B + A \cdot C$$

3 . A ve $B, m \times n$ boyutunda; C , $n \times k$ boyutunda matrisler olsunlar. Bu durumda aşagidaki sekilde carpmanin toplama uzerine sağdan dagilma ozelligi vardir:

$$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$$

İspat:

Alıştırma olarak bırakılımıştır.