Bilgisayar Destekli Lineer Cebir

Fırat İsmailoğlu, PhD

Hafta 3:
Vektörler -II

VEKTÖR UZAYLARI (Vector Spaces)

V bir vektörler kümesi olsun. Ve bu küme uzerinde reel sayı ile çarpma ve vektörlerin toplanması tanımlı olsun.

$\forall\, u, v \in V$ ve $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$ için $au + bv \in V$, oluyorsa yani V'den alınan tüm vektörlerin lineer kombinasyonu yine V kümesi içerisinde oluyorsa V kümesi bir vektör uzayı olur.

Demekki vektörlerden oluşan bir kümenin bir vektör uzayı olduğunu göstermek için bu kümeden herhangi iki vektör alıp, bunların lineer kombinasyonunda yine bu kümenin elemanı olduğunu göstermemiz gerekir.

ör. $W = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{Z} \right\}$ kümesi bir vektör uzayı mıdır?

$\alpha = 0.5$ ve $\beta = 0$ katsayılarını $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} \epsilon\, W$ vektörlerini alırsak $\alpha \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3/2 \end{bmatrix}$

W kümesinin elemanı olmayacağı için W kümesi bir vektör uzayı değildir.

VEKTÖR UZAYLARI

V kümesinin vektör uzayı olduğu gösterilirken ya :

$\forall\, u, v \in V$ ve $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$ için $au + bv \in V$ olduğunu gösteririz; yada iki aşamada

1) $\forall\, u \in V$ ve $\forall\, a \in \mathbb{R}$ için $au \in V$ olduğunu -VE-

2) $\forall\, u, v \in V$ için $u + v \in V$ olduğunu gösteririz.

I nolu şart sağlanmıyorsa 2'ye geçmeyiz direkt vektör uzayı değildir deriz.

Bir önceki örnek için

$\alpha = 0.5$ ve $u = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \epsilon\, W$ için $\alpha u \notin W$ olduğundan W bir vektör uzayı değildir deriz.

VEKTÖR UZAYLARI

ör. $P2$ kümesi ikinci dereceden polinomların kümesi olsun:

$$P2 = \{at^2 + bt + c : a, b, c \,\epsilon \mathbb{R}\}$$

Bu durumda bir $P2$ vektör uzayıdır.

Gerçekten,

1)$k \,\epsilon \mathbb{R}$ ve $p = at^2 + bt + c \,\epsilon\, P2$ için $kp = kat^2 + kbt + kc$ olur. Iki reeel sayının çarpımı yine bir reel sayı olduğundan $ka, kb, kc \,\epsilon \mathbb{R}$ olup $kp \,\epsilon\, P2$ olur.

2) $p1 = a_1t^2 + b_1t + c_1 \epsilon\, P2$ $(a_1, b_1, c_1 \,\epsilon \mathbb{R})$ ve

$p2 = a_2t^2 + b_2t + c_2 \epsilon\, P2$ $(a_2, b_2, c_2 \,\epsilon \mathbb{R})$ elemanlarını alalım. Bunların toplamı

$$p1 + p2 = (a_1 + a_2)t^2 + (b_1 + b_2)t + (c_1 + c_2)$$

olur. Herhangi iki reel sayının toplamı yine reel sayı olduğundan,

$(a_1 + a_2), (b_1 + b_2), (c_1 + c_2) \,\epsilon \mathbb{R}$ olup $p1 + p2 \,\epsilon\, P2$ olur.

VEKTÖR UZAYLARI

ör. $W = \{(x_1, x_2, x_3) | x_2 = \sqrt{2}x_3\}$ kümesi bir vektör uzayı mıdır?

Çözüm. W kümesi 3 boyutlu vektörlerden oluşur ve bu vektörlerin ortak özelliği 2. bileşenin, 3. bileşenin $\sqrt{2}$ katı olmasıdır; yani üç boyutlu bir vektör bu şartı sağlaması şartiyla W'nin bir elemani olabilir.

Bir $x \in W$ alalım, bu durumda $x_2 = \sqrt{2}x_3$ özelliği hali hazırda sağlanmaktadır. Bir k reel sayısı alalım, bu durumda $kx = (kx_1, kx_2, kx_3)$ olur. $kx_2 = \sqrt{2}kx_3$ olacağından $kx \in W$ olur.

Şimdi $y \in W$ alalım. Bu durumda $y_2 = \sqrt{2}y_3$ sağlanır. $x_2 = \sqrt{2}x_3$ ve $y_2 = \sqrt{2}y_3$ taraf tarafa toplanırsa $x_2 + y_2$=$\sqrt{2}(x_3 + y_3)$ olur. Yani toplam sonucu oluşan $\mathrm{x} + y$ vektörünün ikinci bileşeni olan $x_2 + y_2$, bu vektörün üçüncü bileşeninin $\sqrt{2}$ katına eşit olur. O halde $\mathrm{x} + y$ vektörü de W'nin bir elemanı olur.

W kümesi aradığımız iki şartı da sağladığından W kümesi bir vektör uzayıdır.

GERME (Span)

$v^1, v^2, \dots, v^n$ vektörleri eğer bir W vektör uzayının her elemanını herhangi bir lineer kombinasyonlari ile üretebiliyorlarsa bu vektörlere W uzayını geriyor denir.

Bir başka deyişle, W'nin her u elemanı için $c_1, c_2, \dots, c_n$ katsayıları bulunabiliyor öyleki

$$c_1 v^1 + c_2 v^2 + \cdots + c_n v^n = u$$

olur.

(Yani bir uzayı geren vektörler, o uzayın bütün elemanlarını üretebilen vektörlerdir; geren vektörlerden çeşitli miktarlarda alarak uzayın bütün vektörlerini üretebiliriz)

ör. $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ vektörler kümesinin $\mathbb{R}^3$'te üçüncü bileşeni 0 olan vektörlerden oluşan uzayı gerdiğini gösteriniz.

çözüm. Burada gerilen uzayı $V = \left\{\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \end{bmatrix} \mid v_1, v_2 \in \mathbb{R}\right\}$ şeklinde gösterebiliriz. Bu kümenin $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$ kümesi tarafından gerildiğini göstermek için V'nin her elemanin bu kümenin elemanlarının bir lineer kombinasyonu seklinde oluşturabildiğimizi göstermemiz gerekir. Bunun için örneğin $\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ vektörünü alalım. V 'ye ait bu örneğin $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$ kümesinin elemanlari tarafindan oluşturulduğunu göstermek için öyle a, b, c katsayıları bulabilmeliyizki bu katsayilarla bu kümenin elemanlari çarpılıp toplandığında $\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ vektörü elde edilsin.

$$\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

olacak şekilde a, b, c katsayılar var ise ilgilendiğimiz küme V'yi gerer diyebiliriz.

$$\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + 2c \\ b + 3c \\ 0 \end{bmatrix}$$

Buradan
$$3 = a + 2c$$
$$-1 = b + 3c$$
lineer denklem sistemi bulunur. Burada denklem sayisi 2, fakat bilinmeyen sayisi 3 olduğundan çözüm bir değişkene bağlı olur. Bu değişken a olsun. Birinci denklemden $c = \frac{3-a}{2}$ bilunur. Bu, ikinci denklemde yerine konulursa $b = \frac{3a-11}{2}$ olur. a yerine 1 verdiğimizde siztemin bir çözümü $\begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$ olur. Bulduğumuz bu katsayılari geren kümede yerine koyarsak
$$1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 4 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$
olur. Böylece $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ kümesinin elemanlarini kullanarak V'nin herhangi bir elemani olan $\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ vektörünü üretebilmiş oluruz. Şöylede düşünebiliriz: $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ vektöründen 1 birim alıp bunun üzerine, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ vektörünü ters yönde 4 kat büyüterek ekledik, bununda üzerine $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ vekröründen 1 birim aldık, ve aradığımız $\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ vektörünü ürettik.

Farklı olarak örneğin $a = 2$ alırsak, $b = -\frac{5}{2}$ ve $c = \frac{1}{2}$ olur. Geren kümenin elemanlarindan bu oranlarda aldigimizda yine aradığımız $\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ vektörünü üretebiliriz:

$$2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{5}{2} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vektör uzayının belirli bir elemanini üretirken geren kümenin elemanlarını farklı oranlarda alabilmemizin nedeni, yani geren kümenin elemanlarina (vektörlere) karşılık gelen katsayilarin sabit olmamasinin nedeni bu vektörlerin kendi içinde lineer olarak bagimsiz olmamasidir. Gerçekten

$$2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 3 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

olduğundan geren kümenin üçüncü vektörü ilk iki vektörünün bir lineer kombinasyonu şeklinde oluşturulabilir. Bu noktada BAZ kavramı ortaya çıkar. Kısaca, geren küme aynı zamanda bir bazsa bu kümedeki tüm vektörler birbirinden bağımsızdır ve gerdikleri kümenin elemanlarını (vektörlerini) yalnızca bir şekilde oluşturabilirler.

BAZ (Basis)

Yukarıda gördüğümüz germe'ye ek olarak, uzayı geren vektörler aynı zamanda (kendi içlerinde) lineer olarak bağımsızsa (birbirlerini üretemiyorlarsa) bu vektörlere uzayın bir bazı denir.

Formal olarak şöyle düşünülebilir:

$v^1, v^2, \ldots, v^n$ vektörleri bir W vektör uzayını gererken, bu vektörler aynı zamanda lineer olarak bağımsızsa yani

$$c_1 v^1 + c_2 v^2 + \cdots + c_n v^n = \mathbf{0}$$

eşitliği yalnızca $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$ olduğunda sağlanıyorsa $v^1, v^2, \ldots, v^n$ vektörlerine W vektör uzayının bir bazıdır denir.

ör. $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ kümesi $\mathbb{R}^3$'ün bir bazıdır. Yani $\mathbb{R}^3$'teki her vektör, yani bileşenleri bir reel sayı olan 3 boyutlu her vektör, bu kümenin vektörlerinin bir lineer kombinasyonu olarak üretilebilir, ve bu üretim tektir; yani bazın her bir vektöründen ne kadar alacağımız kesindir.

$\mathbb{R}^3$'ten bir $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ vektörü alalım. Bu vektör

$$a \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

şeklinde a, b ve c katsayıları ile bazın vektörleri ile birlikte kullanılarak elde edilebilir.

Teorem. $v^1, v^2, \dots, v^n$ vektörleri bir W vektör uzayını gersin aynı zamanda lineer bağımsız olsun (baz olsun). Bu durumda W'nin vektörleri $v^1, v^2, \dots, v^n$ vektörlerinin yalnızca bir lineer kombinasyonu şeklinde oluşturulabilir.

Kanıt.

Bu teoremi *olmayana ergi yöntemi* ile kanıtlayacağız. Yani teoremin tersini doğru kabul edeceğiz, daha sonra bu kabulun gerçekle çeliştiğini göstererek teoremin tersinin yanlış olduğunu, dolayısıyla kendinin doğru olduğunu göstereceğiz.

Kabul edelimki teoremimiz yanlış olsun. Bu durumda bir W'ye ait bir w vektörü $v^1, v^2, \dots, v^n$ vektörleri tarafından iki şekilde oluşturulabilinir:

$$c_1 v^1 + c_2 v^2 + \cdots + c_n v^n = w$$
$$d_1 v^1 + d_2 v^2 + \cdots + d_n v^n = w$$

olacak şekilde hem $c_1, c_2, \dots, c_n$ katsayıları hemde $d_1, d_2, \dots, d_n$ katsayıları var olsun. Bu iki denklem birbirinden çıkartılarak $\mathbf{0}$ vektörü elde edilir:

$$(c_1 - d_1)v^1 + (c_2 - d_2)v^2 + \cdots + (c_n - d_n)v^n = \mathbf{0}$$

$v^1, v^2, \dots, v^n$ vektörleri lineer olarak bağımsız olduğundan bu vektörlerin bir lineer kombinasyonunun $\mathbf{0}$ vektörüne eşit olması ancak tüm katsayıların 0 olması ile mümkündür.

$$c_1 - d_1 = 0$$
$$c_2 - d_2 = 0$$
$$\dots$$
$$c_n - d_n = 0$$

olup $c_1 = d_1, c_2 = d_2, \dots, c_n = d_n$ olur. Yani w vektörünün ikinci bir şekilde, farklı katsayılarla, oluşturulması mümkün değildir. Bu ise, W'ye ait bir w vektörü $v^1, v^2, \dots, v^n$ vektörleri tarafından iki şekilde oluşturulabilinir kabulu ile çelişir, teoremin tersi yanlıştır, o halde kendi doğrudur.

Teorem. $v^1, v^2, \dots, v^n$ vektörleri bir vektör uzayının bir bazı olsun. Bu durumda bu vektörlerden herhangi birinin yerini bu vektörlerin bir lineer kombinasyonu alabilir. Geri kalan $n-1$ adet vektör ve lineer kombinasyon sonucu ortaya çıkan yeni vektör birleşerek yeni bir baz oluştururlar.

ör. $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\2\end{bmatrix}\right\}$ kümesi $\mathbb{R}^3$ için bir bazdır. Bu vektörlerin bir linner kombinasyonu alalım:

$$2\cdot\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} - 1\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} + 3\cdot\begin{bmatrix}0\\0\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\-1\\6\end{bmatrix}$$

Bu vektörü bazı oluşturan vektörlerden herhangi biri ile yer değiştirdiğimizde oluşan

$$\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-1\\6\end{bmatrix}\right\}$$

kümesi de $\mathbb{R}^3$ için bir baz olur. Bu şekilde sonsuz baz üretilebilir. Fakat lineer kombinasyonla oluşan vektör var olan bir vektrün yerini aldığından bazı oluşturan vektörlerin toplam sayısı değişmez, ayni kalır.

Bir Vektör Uzayının Boyutu

Bir vektör uzayının boyutu, bu vektör uzayına baz olan bir kümedeki vektör sayısı kadardır.

ör. $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\2\end{bmatrix}\right\}$ kümesi $\mathbb{R}^3$ ün bir baz olduğunu söylemiştik. Burada 3 adet vektör vardır, o halde gerdiği uzayın boyutu da 3 'tür.