Bilgisayar Destekli Lineer Cebir

Fırat İsmailoğlu, PhD

Hafta 4: Vektörler III

İç Çarpım – Nokta Çarpım (Dot Product)

Iki n − boyutlu vektörün iç çarpımı, karşılıklı bileşenlerin çarpılarak toplanmasıyla ortaya çıkan sayıdır. Formal olarak,

u ve v n − boyutlu iki vektör olsun. Şu halde iç çarpım:

$$\boxed{u \cdot v = \langle u, v \rangle = u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i}$$

ör. $\mathbb{R}^3$ deki $u = (2, 1, 4)$ ile $v = (4,0,-0.5)$ vektörlerinin iç çarpımlarını hesaplayalım:

$$u \cdot v = 2 \cdot 4 + 1 \cdot 0 + 4 \cdot -0.5 = 6$$

Not. İç çarpım işleminde, daha önce gördüğümüz vektör işlermlerinden (skalerle çarpma, toplama, çıkarma) farklı olarak sonuç bir reel sayıdır, bir vektör değildir.

Iç Çarpımın Cebirsel Özellikleri

1. $u \cdot v = v \cdot u$ (değişme ozelligi)
2. $(u + v) \cdot w = u \cdot w + v \cdot w$ (iç carpımın vektör toplama uzerine dağılma özelliği)
3. $(ku) \cdot v = k(u \cdot v)$ (k bir reel sayı olmak üzere)

ör. (ağırlıklı toplama) Diyelimki bir kişi 3 kg elma, 2.5 kg muz, 1 kg armut ve 4 kg cilek alsin. Elmanin, muzun, armutun ve cilegin bir kilo fiyatlari sirasıyla 3.5, 4, 7 ve 12 TL olsun. Bu durumda bu kisinin bu alisveris sonucunda odeyecegi parayi iç çarpimla bulabiliriz.

Fiyat vektörü u olsun: $u = (3.5\,, 4, 7, 12)$

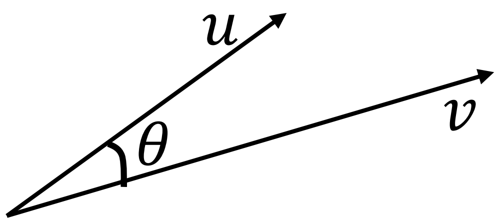
Her bir üründen kaçar kilo alınacağınıda v vektörü göstersin : $v = (3, 2.5, 1, 4)$.

Su halde toplam ucret:

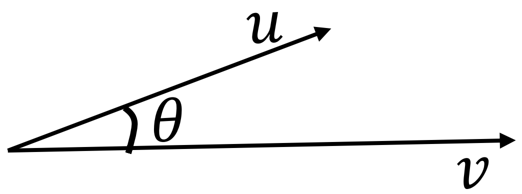
$$u \cdot v = 3.5 \cdot 3 + 4 \cdot 2.5 + 7 \cdot 1 + 12 \cdot 4 = 75.5$$

Iç Çarpımın Geotmetrik Yorumu

$u = (u_1, u_2)$ ve $v = (v_1, v_2)$, $\mathbb{R}^2$'de iki vektör olsun, ve aralarındaki açı θ olsun.



Bu vektörleri v vektörününün dikeyde uzunluğu olmayana kadar döndürürsek(yani yatayla paralel olacak sekilde) aşağıdaki gibi olur:



Bu durumda v_2 (yani dikeydeki buyukluk) 0 olur $(v_2 = 0)$ ve yataydaki buyukluk v vektörünün kendi büyüklüğü olur: $v_1 = \|v\|$. Bu halde iç çarpım:

$$u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2 = u_1 \|v\|$$

u_1, yani u vektörününün yatayda büyüklüğü $\|u\| cos\theta$ idi. Bu büyüklük yukarıda yerine yazilirsa:

$$\boxed{u \cdot v = \|u\| \|v\| cos\theta}$$

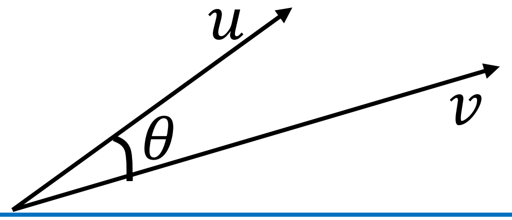
olur. Sonuc olarak iki vektörün iç çarpımı, bu vektörun uzunluklari ile aralarindaki acinin kosinusu carpilarak da bulunabilir.

Yukarıdaki denklemde $cos\theta$ yalnız bırakılırsa:

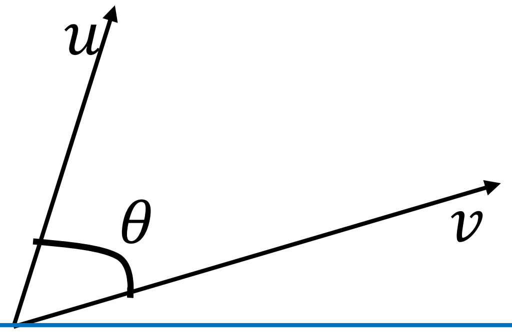
$$\boxed{cos\theta = \frac{u \cdot v}{\|u\| \|v\|}}$$

olur. Bu deger iki vektörün birbirine benzerliğinin hesaplanmasında kullanilabilir.

Hatırlanırsa, bir açı azaldıkça bu açının kosinusu büyür idi. Şu halde iki vektör arasindaki aci azlairsa, bu vektörler arasindaki acinin kosinusu buyur: yani iki vektörün birbirine benzerligi artar.



Benzerlik çok
(θ küçük, kosinus buyuk)



Benzerlik *az*
(θ büyük , kosinus küçük)

ör. 1. cümle: '*Seni sevmeyen ölsün*', 2.cümle: '*Sev seni seveni*', 3. cümle: '*Sevmekten kim usanır*' cümlelerinin birbirlerine olan cosine benzerliklerini bulunuz.

	Sen	Sevmek	Ölmek	Kim	Usanmak
1. cümle	1	1	1	0	0
2. cümle	1	2	0	0	0
3. cümle	0	1	0	1	1

1. cümle $(1,1,1,0,0)$; 2. cümle $(1,2,0,0,0)$; 3. cümle $(0,1,0,1,1)$;

$$\cos(1.\,cümle, 2.\,cümle) = \frac{1\cdot 1 + 1\cdot 2 + 1\cdot 0 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}\,\cdot\sqrt{1^2+2^2}} = 0.77$$

$$\cos(1.\,cümle, 3.\,cümle) = \frac{1\cdot 0 + 1\cdot 1 + 1\cdot 0 + 0\cdot 1 + 0\cdot 1}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}\,\cdot\sqrt{1^2+1^2}} = 0.41$$

olduğundan. 2. cumle, 1. cumleye daha benzerdir.

İç Çarpım ve Vektör Büyüklüğü

v; n boyutlu bir vektör olsun: $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$. Bu vektörün kendisiyle iç çarpımı

$$v \cdot v = v_1 v_1 + \cdots + v_n v_n = v_1^2 + \cdots + v_n^2$$

olur.

Hatırlarsak v vektörünün öklid uzunluğunu $\|v\| = \sqrt{v_1^2 + \cdots + v_n^2}$ olarak hesaplıyorduk. Şu halde

$$\boxed{\|v\| = \sqrt{v \cdot v}}$$

$$\boxed{\|v\|^2 = v \cdot v}$$

şeklinde hesaplayabiliriz.

ör. $v = (-3, 4, 5) \in \mathbb{R}^3$ vektörünün büyüklüğü nedir?

v vektörünün büyüklüğü: $\|v\| = \sqrt{(-3,4,5)(-3,4,5)} = \sqrt{-3^2 + 4^2 + 5^2} = 5\sqrt{2}$

İç Çarpım ve Vektör Büyüklüğü

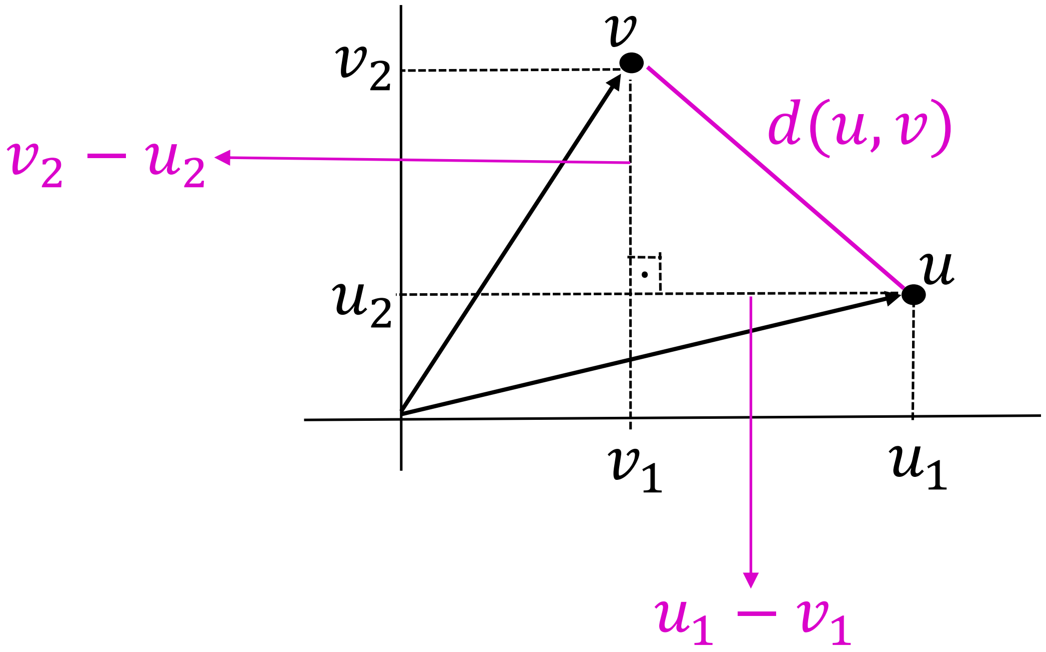
Not: Bazı kaynaklarda iki vektörün iç çarpımı $u \cdot v$ değil, $u^T \cdot v$ yada kısaca $u^T v$ olarak gösterilir. Aslında doğrusu da budur, çünkü normalde iki tane aynı boyutlu vektör (iç) çarpılırken ilk vektörün satır, ikinci vektörün kolon vektörü olması gerekir (bunun neden böyle olması gerektiğini matrisler konusunda daha iyi anlayacağız). O yüzden ilk vektörün satır vektörü olduğunu göstermek için u^T kullanılır; burada üst indis olan T transpoze (döndürme) anlamına gelir. Biz, tanspozu matrisler konusuna gelince göreceğimizden şimdilik iç çarpımı $u \cdot v$ ile yada $< u, v >$ ile göstereceğiz.

Ama normalde iki vektörün iç çarpımı şudur:

$$< u, v > = [u_1, \dots, u_n] \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ \cdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

İki Vektörün Birbirine Uzaklığı

u ve v, $\mathbb{R}^2$ de iki vektör olsun: $u = (u_1, u_2)$ ve $v = (v_1, v_2)$. u ve v vektörleri arası uzaklığı $d(u, v)$ ile gösterelim.



Pisagor teoreminden: $d(u, v) = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (v_2 - u_2)^2}$

$$= \sqrt{u_1^2 + v_1^2 - 2u_1v_1 + v_2^2 + u_2^2 - 2v_2u_2}$$

$$= \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + v_1^2 + v_2^2 - 2(u_1v_1 + v_2u_2)}$$

$$= \sqrt{u \cdot u + v \cdot v - 2(u \cdot v)}$$

$$d(u,v) = \sqrt{u \cdot u + v \cdot v - 2(u \cdot v)}$$
$$d(u,v) = \sqrt{(u-v) \cdot (u-v)}$$
$$\boxed{d(u,v) = \|(u-v)\|}$$

ör. Diyelimki K1, K2, K3 ve K4 kodlu 4 kisi ve M1, M2, M3, M4, ve M5 kodlu 5 film olsun. Aşağıdaki tablo bu kisilerin bu filmlere verdigi puanları gostersin. Amacımız K4'ün M5'e verdigi puanı tahmin etmek olsun. Bu durumda izlenilecek bir strateji, önce K4'e en yakın kişiyi bulmak, daha sonra bulunan kisinin M5'e verdigi puanı K4'ün puanı olarak tahmin etmek.

	M1	M2	M3	M4	M5
K1	3	8	7	5	5
K2	4	9	8	9	7
K3	2	7	5	4	3
K4	4	8	6	7	?

	M1	M2	M3	M4	M5
K1	3	8	7	5	5
K2	4	9	8	9	7
K3	2	7	5	4	3
K4	4	8	6	7	?

$$d(K4, K1) = \sqrt{(1,0,1,2) \cdot (1,0,1,2)} = \sqrt{6}$$
$$d(K4, K2) = \sqrt{(0,1,2,2) \cdot (0,1,2,2)} = \sqrt{9}$$
$$d(K4, K3) = \sqrt{(2,1,1,3) \cdot (2,1,1,3)} = \sqrt{15}$$

olduğundan K4'e en yakin kisi K1'dir. K1 kisinin M5 icin puani 5 oldugundan, K4'un M5 icin puanini 5 olarak tahmin ederiz.

	M1	M2	M3	M4	M5
K1	3	8	7	5	5
K2	4	9	8	9	7
K3	2	7	5	4	3
K4	4	8	6	7	?

Birde vektörlerin cosinüs benzerliklerini hesaplayalım:

$$\cos(K1, K4) = \frac{<(3,8,7,5),(4,8,6,7)>}{\sqrt{3^2+8^2+7^2+5^2}\cdot\sqrt{4^2+8^2+6^2+7^2}} = 0.98$$

$$\cos(K2, K4) = \frac{<(4,9,8,9),(4,8,6,7)>}{\sqrt{4^2+9^2+8^2+9^2}\cdot\sqrt{4^2+8^2+6^2+7^2}} = 0.99$$

$$\cos(K3, K4) = \frac{<(2,7,5,4),(4,8,6,7)>}{\sqrt{2^2+7^2+5^2+4^2}\cdot\sqrt{4^2+8^2+6^2+7^2}} = 0.97$$

Cosinüs benzerliği dikkate alındığında K4 kullanıcısına en yakın kullanıcı K2 çıkmaktadır.

LİNEER TRANSFORMASYON

$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ bir fonksiyon olsun. Lineer Cebirde 3 temel görevimiz vardır:

1. Verilen bir $x \in \mathbb{R}^n$ için $f(x) \in \mathbb{R}^m$ i bulmak
2. Verilen bir $y \in \mathbb{R}^m$ icin $f(x) = y$ olacak sekilde $x \in \mathbb{R}^n$ i bulmak (görüntüsü y vektörü olan x vektörünü bulmak)
3. $f(x) = \lambda x$ olacak şekilde x vektörünü ve λ skalerini (reel sayısını) bulmak.

Eger f fonksiyonu bir lineer transformasyon ise bu üç görevi kolaylıkla yerine gtirebilliriz.

Lineer Transformasyon:

Bir $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ bir fonksiyonu lineer transformasyon olmasi icin iki şartı sağlaması gerek ve yeterlidir:

1. α herhangi bir skaler, ve u, $\mathbb{R}^n$ 'de herhangi bir vektör olmak üzere $f(\alpha u) = \alpha f(u)$
2. u ve v, u, $\mathbb{R}^n$ 'de herhangi herhangi iki vektör olmak üzere $f(u+v) = f(u) + f(v)$

1. $f(\alpha u) = \alpha f(u)$ demek:

Bir vektörün uzatılmış, yada kısaltılmış halinin görüntüsü; görüntünün uzatılmış yada kısaltılmış haline eşit olmalıdır.

2. $f(u+v) = f(u) + f(v)$ demek:

Iki vetörün toplamının görüntüsü, bu vektörlerin görüntülerin toplamına esit olmalidir.

ör. $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \;\; f(x) = f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$ fonksiyonu bir lineer transformasyondur.

Bunu kanıtlamak için iki şeyi gösterecegiz:

1. $f(\alpha x) = \alpha f(x)$ oldugunu gosterelim.

$$f(\alpha x) = f\begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 + \alpha x_2 \\ \alpha x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(x_1 + x_2) \\ \alpha x_1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \alpha f(x)$$

2. $f(x+y) = f(x) + f(y)$ oldugunu gosterelim.

$$f(x+y) = f\begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 + x_2 + y_2 \\ x_1 + y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 + y_2 \\ y_1 \end{pmatrix} = f(x) + f(y)$$

ör. $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $T(x_1, x_2, x_3) = ax_1 + bx_2 + cx_3$ olarak tanımlansın $(a, b, c \in \mathbb{R})$. Bu fonksiyonun bir lineer transformasyon olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

Önce $T(\alpha x) = \alpha T(x)$ olduğunu yani vektörün bir skalerle çarpımının görünütüsünün, vektörün görüntüsünün bu skalerle çarpılmasına eşit olduğunu gösterelim.

$$T(\alpha x) = T(\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3) = a\alpha x_1 + b\alpha x_2 + c\alpha x_3 = \alpha(ax_1 + bx_2 + cx_3) = \alpha T(x)$$

Şimdi ise $x, y \in \mathbb{R}^3$ için $T(x + y) = T(x) + T(y)$ olduğunu, yani vektörlerin toplamının görüntsünün, görüntüler toplamına eşit olduğunu gösterelim.

$$T(x + y) = T(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) = a(x_1 + y_1) + b(x_2 + y_2) + c(x_3 + y_3)$$

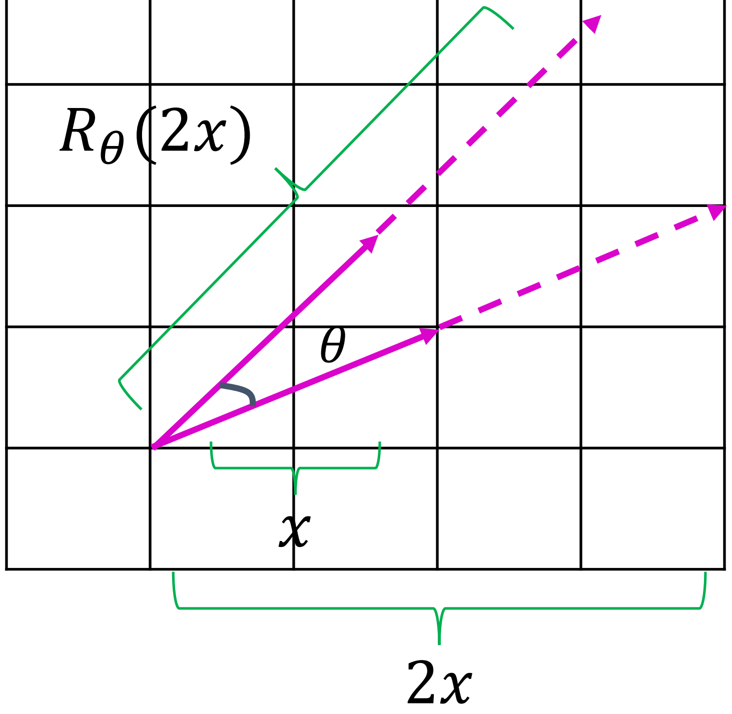
$$= ax_1 + ay_1 + bx_2 + by_2 + cx_3 + cy_3 = \underbrace{ax_1 + bx_2 + cx_3} + \underbrace{ay_1 + by_2 + cy_3}$$

$$= \quad T(x) \quad + \quad T(y)$$

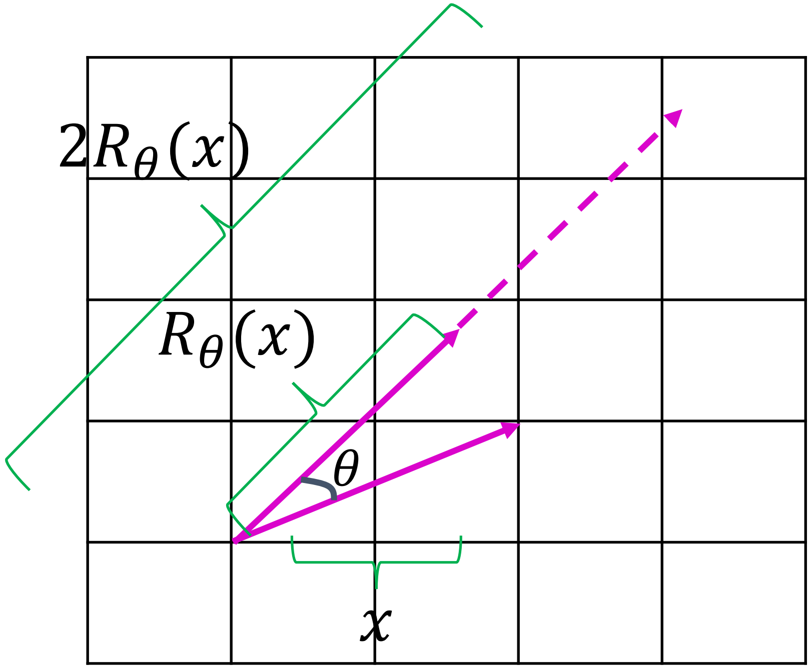
ör. $R_\theta: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ rotasyon (döndürme) fonksiyonu $\mathbb{R}^2$ deki bir vektörü θ açısı kadar döndürür. Bu fonksiyon bir lineer transformasyondur.

Kanıt:

1. $R_\theta(\alpha x) = \alpha R_\theta(x)$ olduğunu gösterelim. Bu, uzatılmış (yada kisaltılmış) vektörün döndürülmüş halinin, vektörün döndürülmüş halinin uzatilmasina (yada kisaltilmasina) eşit olduğu anlamina gelir. Gerçekten

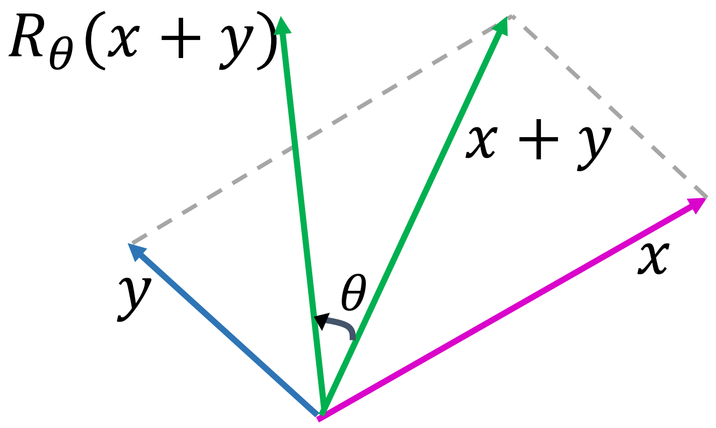


(uzatılmış halin döndürülmüş hali)

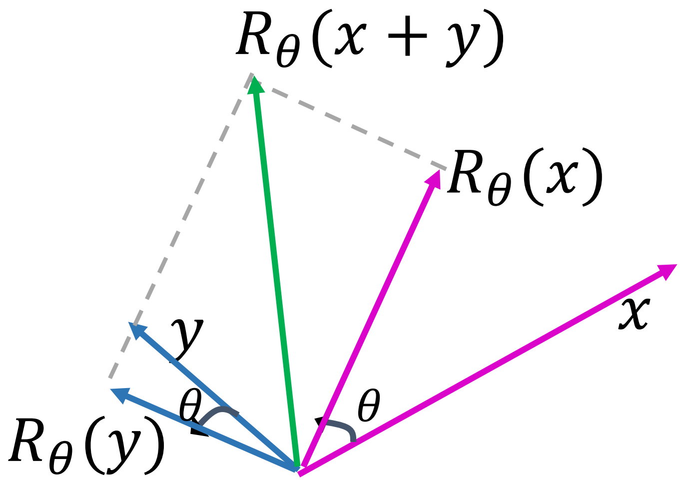


(döndürülmüş halin uzatılmış hali)

2. $R_\theta(x+y) = R_\theta(x) + R_\theta(y)$ olduğunu gösterelim. Bu, iki vektörün toplaminin döndurulmus halinin, bu vektörlerin dondurulmus hallerinin toplamina eşit oldugu anlamina gelir.



(toplamın döndürülmüş hali)



(döndürülmüş vektörlerin toplamı)

ör. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \;\; f(x) = f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$ fonksiyonun lineer transform olmadığını gösterelim.

$\alpha = 0$ ve $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ alınırsa $f(\alpha x) = f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha f(x)$

Lineer Transformasyonun Genelleştirilmesi

Teorem: $f:\ \mathbb{R}^n \to\ \mathbb{R}^m$ bir fonksiyonun bir lineer transformasyon olmasi icin gerek ve yeter şart $\forall\ x, y\ \in\ \mathbb{R}^n$ ve $\forall\ \alpha, \beta\ \in \mathbb{R}$ için

$$\boxed{f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)}$$

olmasıdır.

Kanıt: $\Longrightarrow$) $f:\ \mathbb{R}^n \to\ \mathbb{R}^m$ bir lineer transformasyon olsun. $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$ olduğunu göstereceğiz.

$$f(\alpha x + \beta y) = f(\alpha x) + f(\beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

lineer transformasyonun ikinci özelliğinden

lineer transformasyonun birinci özelliğinden

$\Longleftarrow$) $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$ olsun. f'nin bir lineer transformasyon oldugunu gösterecegiz.

1. $\alpha = 1$ ve $\beta = 0$ alınırsa $f(\alpha x + \beta y) = f(\alpha x) = \alpha f(x) + \beta f(y) = \alpha f(x)$
2. $\alpha = 1$ ve $\beta = 1$ alınırsa $f(\alpha x + \beta y) = f(x + y) = \alpha f(x) + \beta f(y) = f(x) + f(y)$

Sonuç: Bir fonksiyonun lineer transformasyon oldugunu gostermek icin

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

oldugunu göstermek gereklidir ve yeterlidir.

$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$ nin Doğal Genişlemesi

f bir lineer transformasyon iken $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$ özelliğini genişletebiliriz.

$x^1, x^2, \dots, x^m$ $\mathbb{R}^n$'de m tane vektör olsun: $x^i \in \mathbb{R}^n$ $(i \in \{1, \dots, m\})$

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ m tane skaler olsun: $\alpha_i \in \mathbb{R}$ $(i \in \{1, \dots, m\})$. Şu halde

$$\boxed{f(\alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_m x^m) = \alpha_1 f(x^1) + \alpha_2 f(x^2) + \cdots + \alpha_m f(x^m)}$$

olur. Bu ifadenin kompakt hali:

$$\boxed{f\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x^i\right) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i f(x^i)}$$