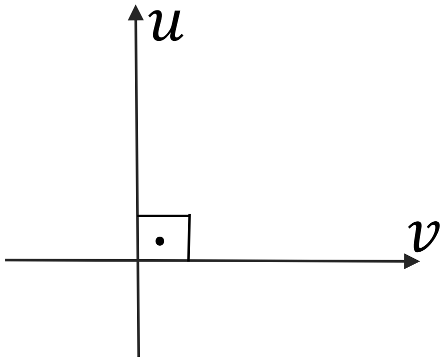
Bilgisayar Destekli Lineer Cebir

Fırat İsmailoğlu, PhD.

Hafta 5:
Vektörler IV

Ortogonal Vektörler

u ve v; n boyutlu birer vektör iken, bu iki vektör ortoganal ise; aralarındaki açı 90° ‘dir. $\cos(90) = 0$ olduğundan; bu iki vektörün iç çarpımı 0 olur.



$$< u, v > = \|u\|\|v\|cos(90)$$
$$= 0$$

Teorem: Ortogonal vektörler lineer olarak bağımsız vektörlerdir. Birbirlerinden üretilemezler.

Kanıt: Kanıtı, olmayana ergi yöntemi (OEY) ile yapalım. Bu yöntemde kanitlamaya calistigimiz seyin tersinin yanlış olduğunu gosterecegiz; bu kanitilamaya calistigimiz seyin dogru olduğu anlamina gelir.

Varsaylımki u, ve v gibi iki ortogonal vektörümüz olsun, ve bu vektörler bağımlı vektörler olsunlar.

u ve v ortogonal vektörler olduğundan $< u, v > = 0$ olur.

u ve v vektörlerini bagimli olarak kabul ettigimizden a ve b gibi iki 0'dan farkli iki skaler vardir; oyleki $au + bv = \mathbf{0}$ olur. Buradan $u = -\frac{b}{a}v = \left(-\frac{b}{a}\right)(v_1, \ldots, v_n)$ elde edilir.

O halde $< u, v, > = \left(-\frac{b}{a}\right) v_1 \cdot v_1 + \cdots + \left(-\frac{b}{a}\right) v_n \cdot v_n = \left(-\frac{b}{a}\right)(v_1^2 + \cdots + v_n^2)$

$< u, v, > = 0$ olduğu için:

$$\left(-\frac{b}{a}\right)(v_1^2 + \cdots + v_n^2) = 0$$

olur. $v_1^2, \ldots, v_n^2$ pozitif olduğu için yukarıdaki çarpımın 0 olması $-\frac{b}{a} = 0$ olması ile açıklanabilir ki; bu $b = 0$ anlamına gelir. Bu ise a ve b 'nin 0'dan farklı olduğu varsayımımızla <u>çelişir</u>. O halde $< u, v, > = 0$ iken u ve v birbirinden bağımsız olmak zorundadır.

ör. $u = (-1,4,3)$ vektörü ile $v = (5, 2, -1)$ vektörünün ortogonal olduğunu gösteriniz.

Çözüm. $< u, v, > = -1 \cdot 5 + 4 \cdot 2 + 3 \cdot -1 = 0$ olduğu için u ve v vektörleri ortoganaldır.

Cauchy – Schwarz Eşitsizliği

Teorem: $u, v \in \mathbb{R}^n$ olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitsizlik her zaman geçerlidir.

$$\boxed{|< u, v >| \leq \|u\| \cdot \|v\|}$$

Bu eşitsizliği daha açık bir ifade ile şu şekilde de yazılabiliriz:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} u_i v_i\right| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} u_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} v_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\boxed{\left|\sum_{i=1}^{n} u_i v_i\right|^2 \leq \sum_{i=1}^{n} u_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} v_i^2}$$

Kanıt: $u, v \in \mathbb{R}^n$, n boyutlu vektörler ve t herhangi bir reel sayı olsun. $u + tv$ gibi bir vektörü ele alalım.

Not: Daha önce iç çarpımı $< u, v >$ ile gösteriyorduk. Şimdi yerden tasarruf etmek amacıyla direkt uv şeklinde gösterecegiz.

Her vektörün kendisi ile iç çarpımı pozitif olacağından , (çünkü $\|u\| = \sqrt{< u, u >}$ idi)

$(u + tv)(u + tv) \geq 0$

olur. Buradan

$$\|u\|^2 + tuv + tvu + t^2\|v\|^2 \geq 0$$
$$t^2\|v\|^2 + t2uv + \|u\|^2 \geq 0$$

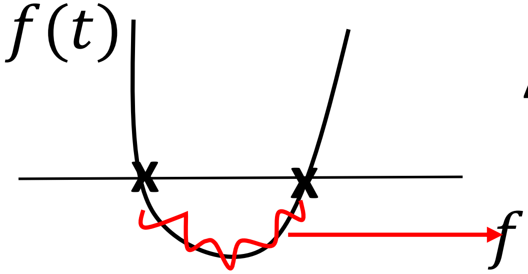
olup, $\|v\|^2 = a, 2uv = b$ ve $\|u\|^2 = c$ olarak gösterilirse

$$at^2 + bt + c \geq 0$$

olur. Bu elde edilen eşitsizlik t'ye bağlı ikinci dereceden bir denklemdir.

Herhangi bir ikinci dereceden denklemde eğer $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ olursa denklemin iki kökü vardır, $\Delta = 0$ olursa denklemin bir kökü; $\Delta < 0$ ise denklemin kökü yoktur.

Denklemin iki kökü olabilmesi için (yani $\Delta > 0$ olabilmesi icin) , bazı t değerleri için denklemin sonucu negatif olmalıdır.



$\Delta > 0$ olma durumu

$f(t)$ buralarda negatif deger aliyor

Fakat her t için $f(t) \geq 0$ olduğundan $\Delta > 0$ olamaz. O halde $\Delta \leq 0$ olmak zorundandır.

$$b^2 - 4ac \leq 0$$

olur. $\|v\|^2 = a, 2uv = b$ ve $\|u\|^2 = c$ tekrar yerine konursa

$$4(uv)^2 - 4\|u\|^2\|v\|^2 \leq 0$$

$$(uv)^2 \leq \|u\|^2\|v\|^2$$

$$|uv| \leq \|u\| \cdot \|v\|$$

elde edilir.

Cauchy-Schwarz eşitsizliğinin basit bir ispatı şu şekilde de yapılabilir:

u ve v vektörleri arasındaki açı θ olmak üzere:

$$< u, v > = \|u\|\|v\|cos(\theta)$$

idi. Eşitliğin her iki tarafının mutlak değeri alınırsa:

$$|< u, v >| = \|u\|\|v\||cos(\theta)|$$

olur (burada $\|u\|$ ve $\|v\|$ uzunluk olup zaten pozitif değer olduklarından mutlak değer dışına çıkarttık).

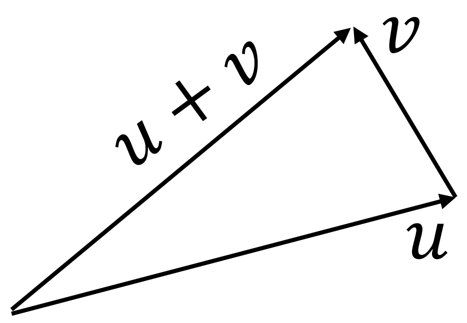
θ hangi açı olursa olsun $cos(\theta)$ her zaman $[-1\,, 1]$ arasında bir değer alacağından $|cos(\theta)| \leq 1$ dir. O halde her zaman

$$\underbrace{\|u\|\|v\||cos(\theta)|}_{|< u, v >|} \leq \|u\|\|v\|$$

$$|< u, v >| \leq \|u\|\|v\|$$

Teorem.(üçgen eşitsizliği) Bir üçgende her zaman bir kenarın uzunluğu diğer iki kenarın uzunlukları toplamından küçüktür.

Bir başka deyişle u ve v vektörleri aynı boyutlu iki vektör olsun. Bu iki vektörün toplamı olan $u+v$ vektörünün uzunluğu u ve v vektörlerinin uzunluları toplamından küçüktür.



$$\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

Kanıt.

Hatırlarsak $\|u\|^2 =< u, u > = uu$ idi.

$$\|u+v\|^2 = \|u+v\|\|u+v\| = \|u\|^2 + 2uv + \|v\|^2$$

Cauchy-Schwarz eşitsizliği kullanılırsa ($uv \leq \|u\|\|v\|$)

$$\|u+v\|^2 \leq \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2$$

$$\|u+v\|^2 \leq \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2$$
$$\|u+v\|^2 \leq (\|u\| + \|v\|)^2$$

olur. Buradan

$$\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

elde edilir. Bu teorem gösteriyorki daha önceden bildiğimiz üçgen eşitsizliği aslında Cauchy-Schwarz eşitsizliğinin bir uygulamasıdır.

Teorem. $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, n boyutlu herhangi bir vektör olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitsizlik her zaman sağlanır.

$$(x_1 + x_2 \dots + x_n)^2 \leq n(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)$$

Bu teoremi örnekleyelim. $x_1 = 3, x_2 = 4,\ x_3 = 6$ olsun. Bu durumda

$$(3+4+6)^2 \leq 3(3^2 + 4^2 + 6^2)$$
$$169 \leq 183$$

Kanıt. Cauchy-Schwarz eşitiziliğinde

$$\left|\sum_{i=1}^{n} u_i v_i\right|^2 \leq \sum_{i=1}^{n} u_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} v_i^2$$

idi. Burada u vektörünü $u = (1,1, \dots, 1)$ ve v vektörünü $v = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ alırsak

$|\sum_{i=1}^{n} u_i v_i|^2 = \ (1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + \cdots + 1 \cdot x_n)^2 = (x_1 + x_2 \dots + x_n)^2$ olur.

$\sum_{i=1}^{n} u_i^2 = (1^2 + 1^2 + \cdots + 1^2) = n$

$\sum_{i=1}^{n} v_i^2 = (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)$ olur. Bu değerler C-S eşitsizliğinde yerlerine yazılırsa teorem ispatlanmış olur.

ör.. $x = (1, -2, 4)$ ve $y = (2, 4, -8)$ vektörleri için C-S eşitsizliğinin doğru olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

$$|< x, y >| = |1 \cdot 2 - 2 \cdot 4 - 4 \cdot 8| = |-38| = 38$$

$$\|x\| = \sqrt{1^2 + -2^2 + 4^2} = \sqrt{21}$$

$$\|y\| = \sqrt{2^2 + 4^2 - 8^2} = \sqrt{84}$$

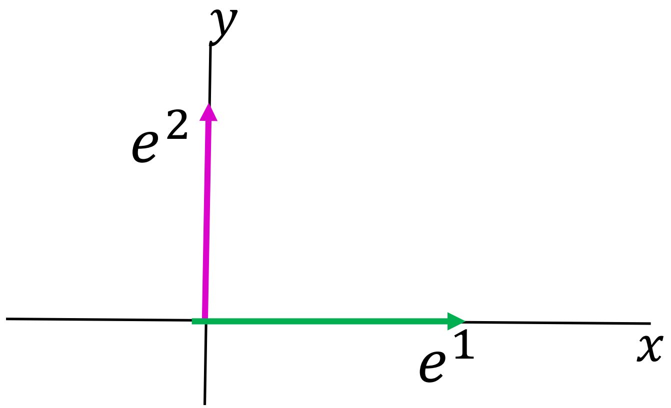
O halde $\|x\|\|y\| = \sqrt{1764} = 42$

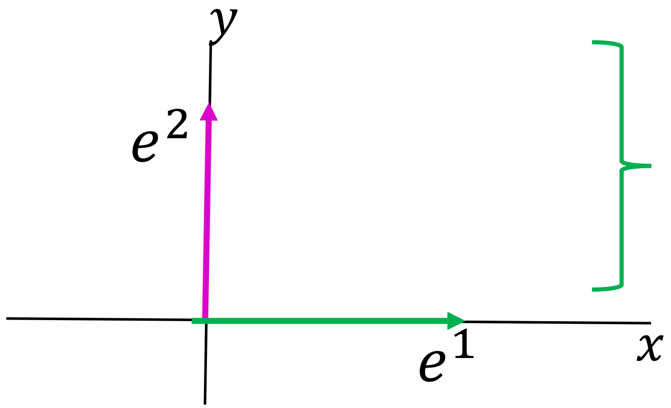
$$38 = |< x, y >| \leq \|x\|\|y\| = 42$$

Geren Kümeler (Spanning Sets)

Vektörler konusuna ilk başladığımızda özel bir vektör çeşidi olan birim vektörleri görmüştük. Bu vektörleri e^i ile gösterdik, bu e^i vektörünün i. bileşeninin 1 diğer bileşenlerinin 0 olduğu anlamına geliyordu.

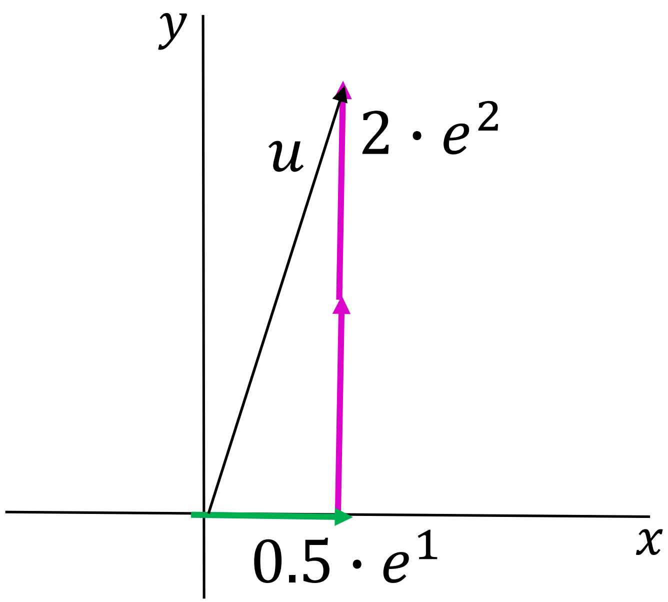
$\mathbb{R}^2$ de $e^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ve $e^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ birim vektörlerini ele alalım. Bu vektörlerin gösterimi şöyle olur.





$\mathbb{R}^2$ deki her nokta (vektör) e^1 ve e^2 vektörlerinin bir lineer kombinasyonu şeklinde yazılabilir! (Informal olarak şöyle düşünebiliriz: $\mathbb{R}^2$ deki her nokta biraz e^1 'den biraz e^2 den alınıp bu alınanlar kombine edilerek oluşturulabilir.

Örneğin $u = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ vektörünü ele alalım.



$$\begin{bmatrix} 0.5 \\ 2 \end{bmatrix} = 0.5 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(0.5 birim e^1 'den , 2 birim e^2 'den alarak u vektörünü oluşturduk (türettik) .)

$\mathbb{R}^2$ uzayındaki her nokta, e^1 ve e^2 vektörleri tarafından türetilebileceğinden, e^1 ve e^2 vektörleri $\mathbb{R}^2$ uzayını gerer diyeceğiz.

$\{e^1, e^2\}$ kümesi $\mathbb{R}^2$ uzayını geren bir kümedir diyeceğiz.

Benzer olarak $\mathbb{R}^3$ uzayını $e^1 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, e^2 = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$, ve $e^3 = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ vektörleri gerer (yani $\mathbb{R}^3$ uzayındaki her bir nokta bu üç vektörün bir lineer kombinasyonu şekilinde oluşturulabilir).

Şimdi geren kümeler kavramını yalınızca birim vektörlerin birim vektörlerin bir özelliğiymiş gibi olmaktan çıkarıp, geren kümeler kavramını genelleştirelim.

$\mathbb{R}^n$ uzayında k tane vektörümüz olsun: $v^1, v^2, \ldots, v^k$. (Bu vektörlerin her birinin n tane bileşeni vardır).

Bu vektörlerin bir lineer kombinasyonu şöyle olur:

$$a_1 v^1 + a_2 v^2 + \cdots + a_k v^k$$

$$a_1 v^1 + a_2 v^2 + \cdots + a_k v^k$$

Burada $a_1, a_2, \dots, a_k$ katsayılari birer reel sayı ve çarpıldıkları vektörlerin kombinasyona ne kadar ve ne yönde (pozitif, negatif) katkıda bulunacağını belirtir.

$a_1, a_2, \dots, a_k$ katsayıları değiştikçe $v^1, v^2, \dots, v^k$ vektörlerinden yeni vektörler türetilir. Bu şekilde üretilebilcek tüm vektörlerin kümesine $v^1, v^2, \dots, v^k$ vektörlerinin ***gerdiği küme*** denir. Formal olarak şöyle gösterilir.

S kümesi , $\mathbb{R}^n$ uzayından alınan k tane vektörün kümesi olsun $S = \{v^1, v^2, \dots, v^k\}$.
S kümesinin gerdiği küme S'deki vektörlerin tüm lineer kombinasyonlarının oluşturduğu vektörlerin kümesidir $span(S)$ ile gösterililir:

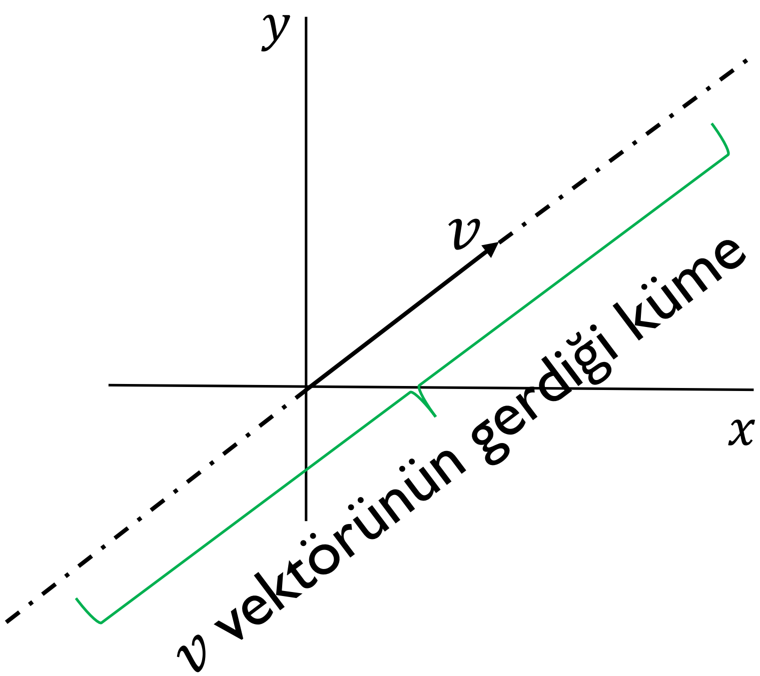
$$\boxed{span(S) = \left\{a_1 v^1 + a_2 v^2 + \cdots + a_k v^k \mid a_i \in \mathbb{R}, v^i \in \mathbb{R}^n, i \in \{1,2,\dots,n\}\right\}}$$

$$span(S) = \Big\{\underbrace{a_1v^1 + a_2v^2 + \cdots + a_kv^k}_{S \text{ kümesinin elemanları bu şekildedir}} \; \underbrace{\;|\;}_{\text{öyleki}} \; \underbrace{a_i \in \mathbb{R}\,,}_{a_i\text{'ler birer reel sayıdır}} \; \underbrace{v^i \in \mathbb{R}^n,}_{v^i\text{'ler } \mathbb{R}^n\text{de birer vektördür.}} \; \underbrace{i \in \{1,2,\dots,n\}}_{i\text{'ler } 1-n \text{ arası bir tamsayıdır.}}\Big\}$$

Özel olarak $a_1, a_2, \dots, a_k$ katsayılarının tamamı 0 alınırsa $\mathbb{R}^n$de $\mathbf{0}$ vektörü elde edilir (tüm bileşenleri 0 olan vektör). Sonuç olarak bütün geren kümelerde $\mathbf{0}$ vektörü bulunur.

Germe işlemini daha iyi anlamak için $\mathbb{R}^2$ de tek bir vektörün gerdiği kümeye bakalım.

$v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ vektörünün gerdiği küme $\{av \mid a \in \mathbb{R}\}$ dir. Buarada a bir skalerdir. Daha önce görmüştükki bir vektör bir sklarle çarpılırsa ortaya çıkan yeni vektör eski vektörle aynı doğrultuda bir başka vektördür. Şu halde tek bir vektörün gerdiği küme bu vektörün doğrultusundaki noktaların tümüdür.



Özel olarak $v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ vektöründe eğer $x = 0$ ise v vektörünün gerdiği küme y ekseni, $y = 0$ ise v vektörünün gerdiği küme x eksenidir.

ör. $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \end{bmatrix}$ ve $\begin{bmatrix} 4 \\ -8 \end{bmatrix}$ vektörlerinin gerdiği kümeye bakalım. Bu küme:

$$\left\{a_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \end{bmatrix} + a_3 \begin{bmatrix} 4 \\ -8 \end{bmatrix} \;\middle|\; a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\right\} = \left\{\begin{bmatrix} a_1 - 3a_2 + 4a_3 \\ -2a_1 + 6a_2 - 8a_3 \end{bmatrix} \;\middle|\; a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\right\}$$

şeklindedir.

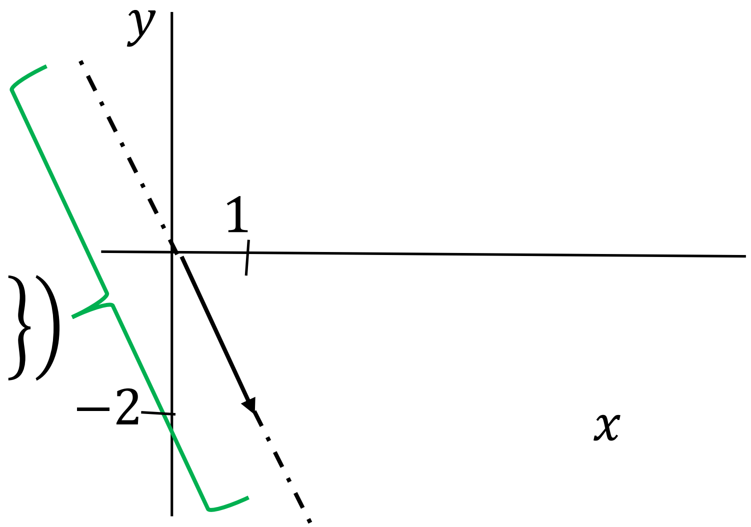
$$\left\{\begin{bmatrix} a_1 - 3a_2 + 4a_3 \\ -2a_1 + 6a_2 - 8a_3 \end{bmatrix} \middle| a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\right\}$$

$\begin{bmatrix} a_1 - 3a_2 + 4a_3 \\ -2a_1 + 6a_2 - 8a_3 \end{bmatrix}$ vektörüne bakıldığında a_1, a_2, a_3 nasıl olursa, nasıl seçilirse seçilsein 2. bileşenin ilk bileşenin -2 katı olduğu görülür: $\begin{bmatrix} a_1 - 3a_2 + 4a_3 \\ -2(a_1 - 3a_2 + 4a_3) \end{bmatrix}$. Şu halde ilk bileşene örneğin x dersek ikinci bileşen -$2x$ olur. Böylece verilen üç vektörün gerdiği küme şu şekilde ifade edilebilir:

$$\left\{\begin{bmatrix} x \\ -2x \end{bmatrix} \middle| x \in \mathbb{R}\right\} = \left\{x\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \middle| x \in \mathbb{R}\right\}$$

Bu da $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ vektörünün farklı skalerle çarpılması ile elde edilen bu vektör doğrultusundaki tüm vektörlerin kümesidir.

$$span\left(\left\{\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-3\\6\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4\\-8\end{bmatrix}\right\}\right)$$



ör. Şimdide $\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-3\\6\end{bmatrix}$ ve $\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$ vektörlerinin gerdiği kümeye bakalım. Bu küme:

$$span\left(\left\{\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-3\\6\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\right\}\right)=\left\{\begin{bmatrix}a_1-3a_2+2a_3\\-2a_1+6a_2+a_3\end{bmatrix}\middle|\, a_1,a_2,a_3\in\mathbb{R}\right\}$$

Ortaya çıkan $\begin{bmatrix}a_1-3a_2+2a_3\\-2a_1+6a_2+a_3\end{bmatrix}$ vektöründe birinci bileşen ile ikinci bileşen arasında direkt bir bağ yoktur ama bu vektör şöyle yazılabilir:

$$\begin{bmatrix} a_1 - 3a_2 + 2a_3 \\ -2a_1 + 6a_2 + a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 - 3a_2 \\ -2a_1 + 6a_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2a_3 \\ a_3 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} a_1 - 3a_2 \\ -2a_1 + 6a_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2a_3 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 - 3a_2 \\ -2(a_1 - 3a_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2a_3 \\ a_3 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} x \\ -2x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2y \\ y \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

olduğundan

$$span\left(\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}\right) = span\left(\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}\right)$$

olur. Yani $\begin{bmatrix} -3 \\ 6 \end{bmatrix}$ vektörünün vektör türetmeye bir katkısı yoktur. $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -3 \\ 6 \end{bmatrix}$ ve $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ vektörleri ile türetilebilcek her vektör $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ ve $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ vektörleri ile zaten türetilebilir. Hatta $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ ve $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ vektörleri aynı doğrultuda olmadıklarından, $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ ve $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ vektörleri ile $\mathbb{R}^2$ deki her noktayı (vektörü) türetebiliriz.

Gerçekten örneğin $\mathbb{R}^2$ den $\begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix}$ gibi bir vektör alıp, bunu $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ ve $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ vektörlerinin bir lineer kombinasyonu şeklinde yazmaya çalışalım.

$$\begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix} = a_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Bu şekilde $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ katsayıları bulabilirsek $\begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix}$ vektörünü $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ ve $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ vektörlerinde türetebilmiş oluruz.

$$\begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + 2a_2 \\ -2a_1 + a_2 \end{bmatrix}$$

olur. Buradan

$$k = a_1 + 2a_2$$
$$l = -2a_1 + a_2$$

lineer denklem sistemi elde edilir (lineer denklem sistmelerinin çözümüne ileride çokca vakit ayıracağız) . Aradığımız katsayılar a_1 ve a_2 idi. Yukarıdaki denklem sitemi a_1 ve a_2 ye göre çözülürse:

$a_1 = \frac{k-2l}{5}$ ve $a_2 = \frac{2k+l}{5}$ elde edilir.

Örnek olarak $\begin{bmatrix} 6 \\ -2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ vektörünü, $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ ve $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ vektörlerinin bir lineer kombinasyonu şeklinde elde edelim:

$$\frac{6-2(-2)}{5}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + \frac{2\cdot 6-2}{5}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \end{bmatrix}$$