Mühendislik Ekonomisi

Fırat İsmailoğlu, PhD

Hafta 7

Şimdiki Değer Analizi

Şimdiki Değer Analizi

Şimdiki değer analizi, alternatifler arasında en maliyetsiz alternatifi seçmemiz konusunda bize yardımcı olur.

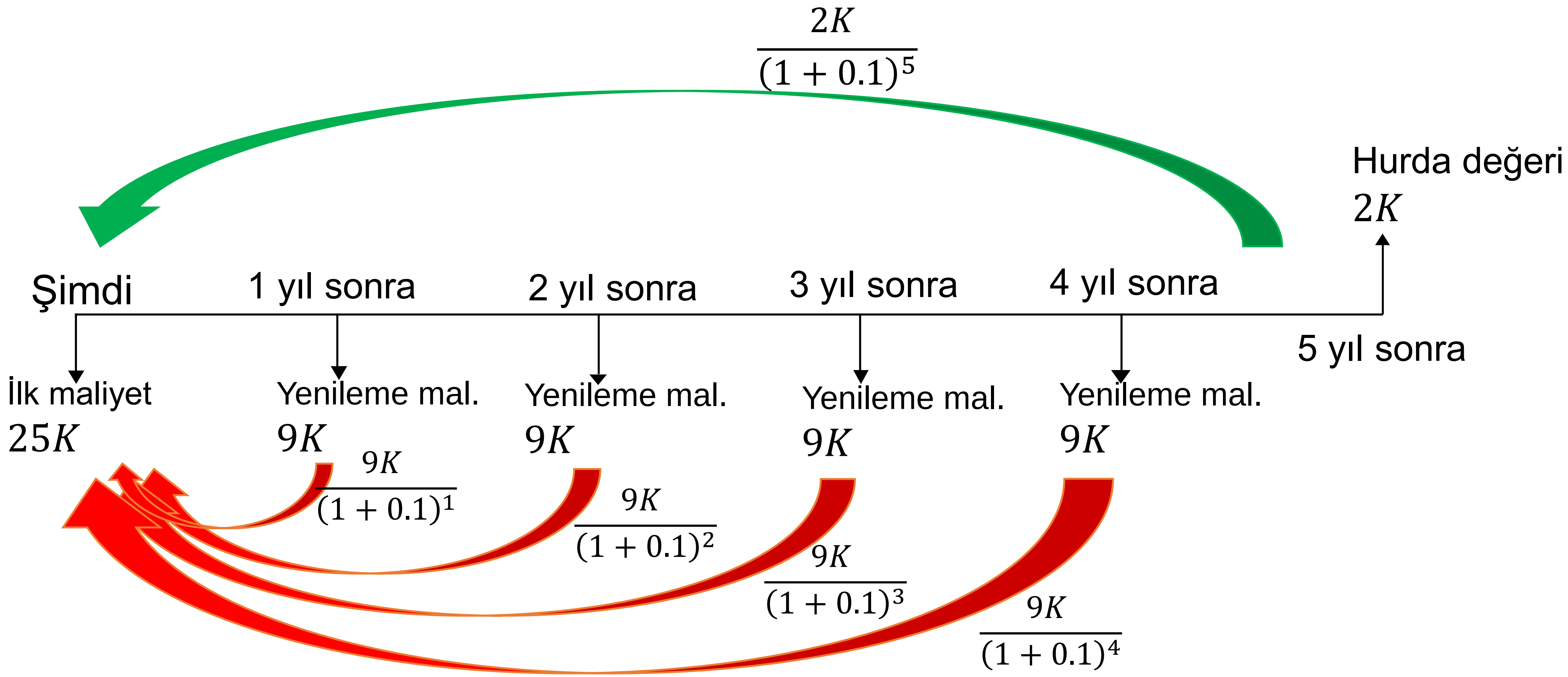
Hatırlarsak yıllık faizin $\%i$ olduğu bir yerde n dönem sonraki F birim paranın şımdiki karşılığı $\frac{F}{(1+i)^n}$ idi. Bu formulü kullanarak seçtiğimiz alternatifin ileride çıkaracağı masrafların/bakım değerlerinin (yenileme maliyetlerinin) şimdiki karşılığını hesaplayacağız.

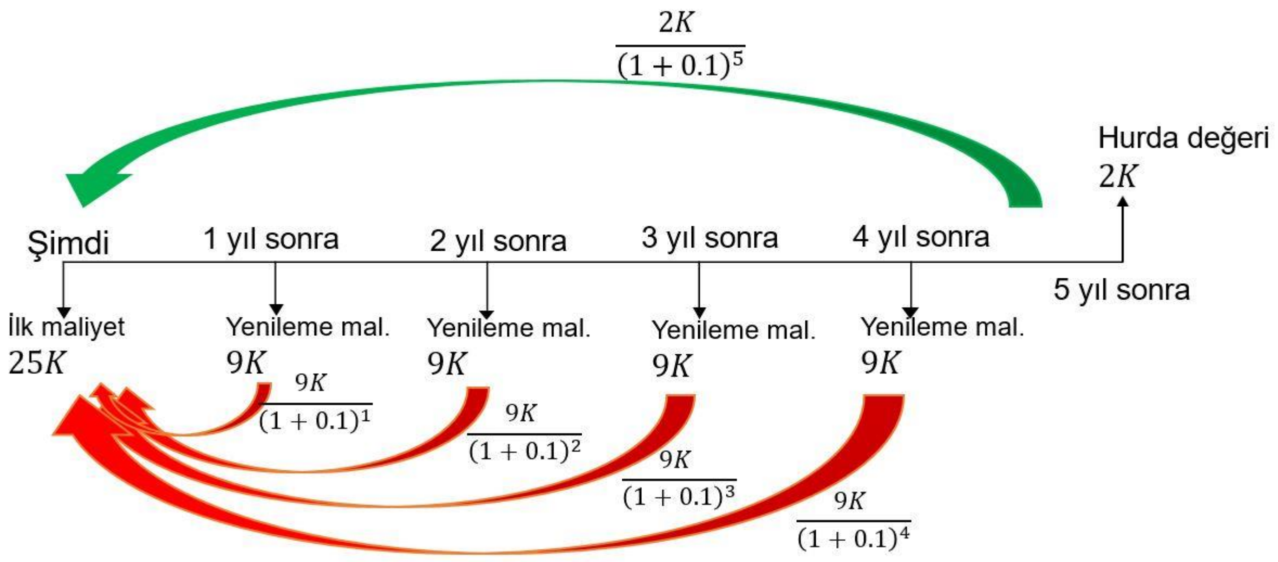
Ayrıca yeni bir kavram olarak '*hurda değeri*' adlı bir kavramla karşılacağız. Bu, seçtiğimiz alternatifin örneğin bir malın yada bir makinenin ömrünü tamamladıktan sonraki edeceği satış fiyatı anlamına gelmektedir. Yine $\frac{F}{(1+i)^n}$ formulünü kullanarak hurda değerinin şimdiki değerini hesaplayıp, bunu maliyetten düşeceğiz.

Şimdiki değer analizini, alternatiflerin ömür sürelerinin aynı olup olmamasına göre iki başlık altında inceleyeceğiz.

1. Eşit Ömürlü Alternatiflerin Şimdiki Değer Analizi

Yıılık faiz %10 olsun. Bir makinenin fiyati (ilk maliyet) 25K TL, yıllık bakım maliyeti ise 9K TLolsun. 5 yıllık ömrü olan bu makinenin hurda değeri 2K TL olsun. Bu durumda bu makinenin maliyet analizini yapalım (başka bir deyişle bu makineyi alıp kullanmakla ortaya çıkacak maliyetin şimdiki değerini hesaplayalım)





Maliyetler	Bin TL
İlk maliyet	$+25$
1 yıl sonraki bakım	$+\frac{9}{(1.1)^1}$
2 yıl sonraki bakım	$+\frac{9}{(1.1)^2}$
3 yıl sonraki bakım	$+\frac{9}{(1.1)^3}$
4 yıl sonraki bakım	$+\frac{9}{(1.1)^4}$
Hurda değeri	$-\frac{2}{(1.1)^5}$
Toplam	$\mathbf{52.28}$

Burda dikkat edilmesi gereken nokta, alternatifler arasında hangisini seçecegimiz kararını şimdi vermemizdir, o yüzden ileride karşılaşılabilecek bütün maliyetlerin, fırsatların şimdiki değerini hesaplamaktayız.

Ayrıca burda yenileme maliyetlerini ve hurda değerinin sabit kaldığını zamanla değişmediğini sabit kaldığını kabul ediyoruz.

Şimdi diyelimki aynı ömre (5 yıl) sahip bir başka makine alternatifimiz olsun. Bu makinenin satın alma maliyeti 30K TL, yıllık bakım maliyeti 7K TL, hurda değeri 1,5K olsun. Bu makinenin maliyet analizi şöyle olur:

Maliyet: $30 + \frac{7}{(1.1)^1} + \frac{7}{(1.1)^1} + \frac{7}{(1.1)^2} + \frac{7}{(1.1)^3} + \frac{7}{(1.1)^4} - \frac{1.5}{(1.1)^5} = 51.25$

olur. Bu durumda bu makineyi almak bir öncekine göre daha az maliyetli olduğundan, bu makineyi tercih ederiz.

2. Farklı Ömürlü Alternatiflerin Şimdiki Değer Analizi

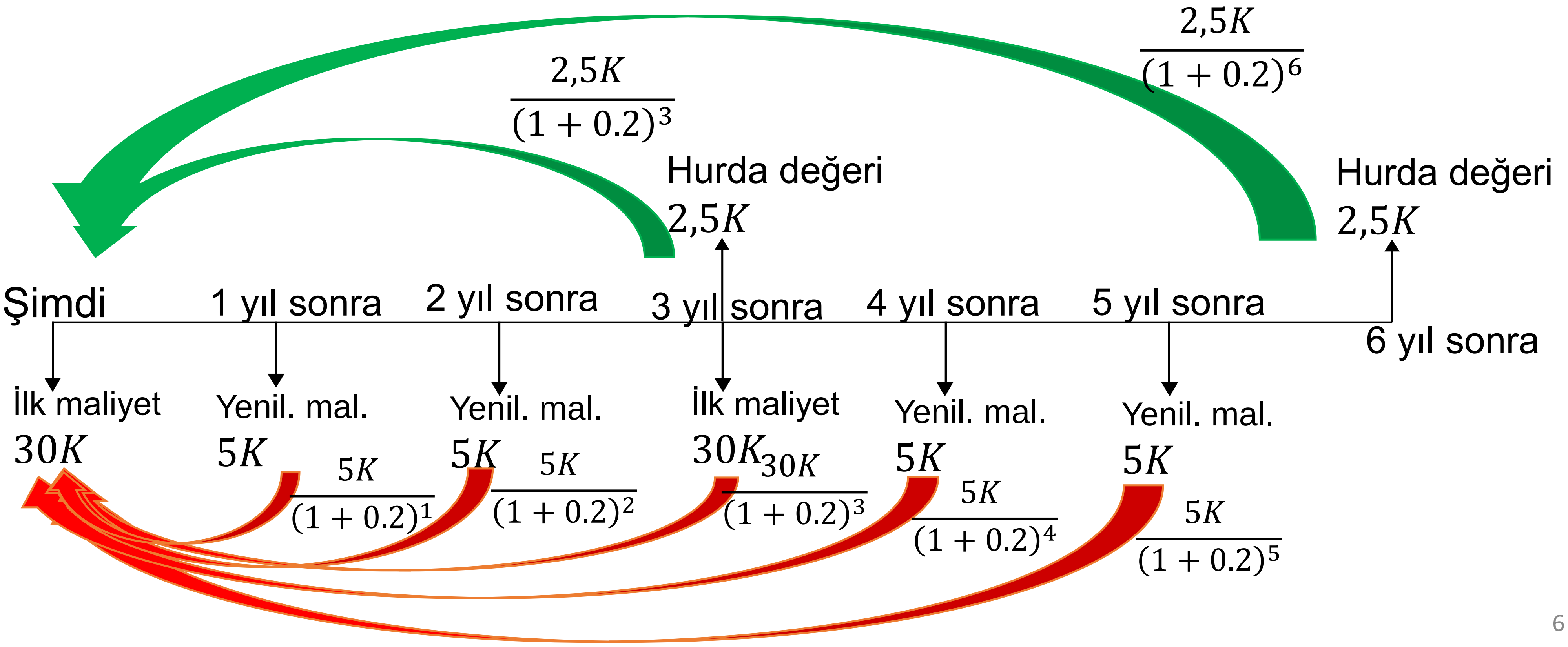
Aslında kolay olan ömürleri aynı olan alternatifleri kıyaslamaktır. Fakat her alternatifin, örneğin her makinenin, ömrü aynı olacak diye bir kural yoktur. Bu durumda ana mantık alternatiflerin ömürlerini ortak bir ömür üzerinden kıyaslamaktır; çünkü eğer her alternatifi kendi ömrü üzerinden maliyetini hesaplarsak ömrü uzun olan alternatif için daha fazla bakım maliyeti hesaplayacğımızdan bu alternatifin maliyeti cogunlukla diger alternatiflerin maliyetlerinden daha yüksek çıkar.

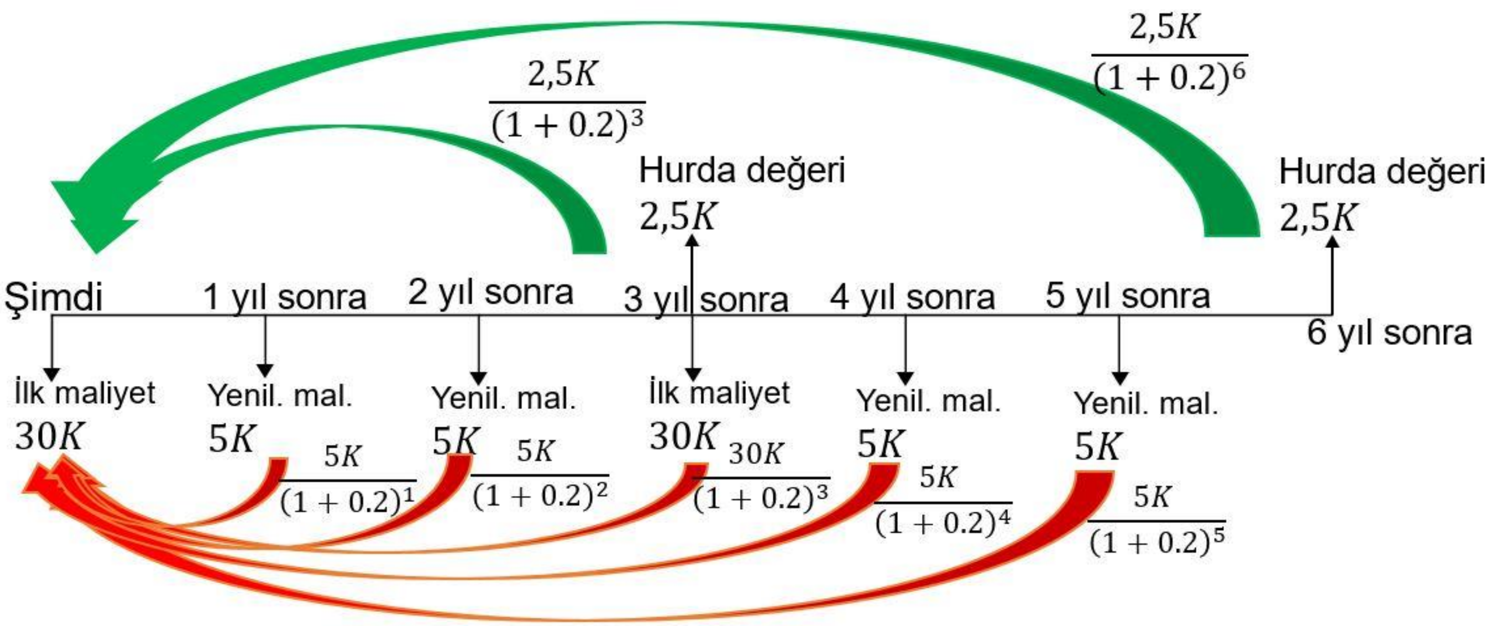
Ortak ömrün süresine karar vermek içinen çok kullanılan yöntem alternatiflerin (farklı) ömürlerinin ortak katlarının en küçüğünü almaktır (OKEK).

Örneğin diyelimki bir A makinesinin ömrü 3 yıl; B makinesinin ömrü 6 yıl olsun. Bu iki makineden hangisini alacağımıza karar verirken, bu ömürlerin OKEK'i olan 6 yılı hesaba katarız. Böylece A makinesini üstüste 2 defa aldığımızı; B makinesini 1 defa aldığımızı farz ederiz.

Şimdi bu üstüste almanın (yani her ömrü tükendiğinde bir daha almanın) maliyetinin nasıl hesaplandığı ile ilgili bir hesaplama yapalım.

Diyelimki A makinesinin satın alma maliyeti 30K TL, yıllık bakım maliyeti 5K TL, hurda değeri 2.5K TL ve ömrü 3 yıl olsun. 6 yıllık bir süre için bu makinenin maliyetini hesaplayalim Yıılık faiz %20 olsun.





Maliyetler	Bin TL
İlk maliyet	$+30K$
1 yıl sonraki bakım	$+\frac{5}{(1.2)^1}$
2 yıl sonraki bakım	$+\frac{5}{(1.2)^2}$
İlk maliyet	$+\frac{30}{(1.2)^3}$
Hurda değeri	$-\frac{2.5}{(1.2)^3}$
ikinci malı aldıktan 1 yıl sonraki bakım	$+\frac{5}{(1.2)^4}$
ikinci malı aldıktan 2 yıl sonraki bakım	$+\frac{5}{(1.2)^5}$
Hurda değeri	$-\frac{2.5}{(1.2)^6}$
Toplam	**57.13**

Şimdi diyelimki B makinesinin ömrü 6 yıl, ilk alım maliyeti 50K yıllık bakım maliyeti 3K ve hurda değeri 4K olsun. Bu makinenin maliyetinin bin TL cinsinden şimdiki değeri:

$$50 + \sum_{i=1}^{5} \frac{3}{(1.2)^i} - \frac{4}{(1.2)^6} = 57.63$$

olduğundan ömrü 3 yıl olan A makinesini almak daha az maliyetlidir.

ör.

	A Makinesi	B Makinesi
İlk maliyet	$11x10^9$ TL	$18x10^9$ TL
Yıllık işletme maliyeti	$3,5x10^9$ TL	$3,1x10^9$ TL
Hurda değer	$1x10^9$ TL	$2x10^9$ TL
Ömür (yıl)	6	9

Yıllık %15 faiz oranı kullanarak şimdiki değer analizi ile iki alternatifi karşılaştırınız

Çözüm.

6 ve 9'un OKEK'i 18 dir. 18 yıl için A makinesini üç defa üstüste alarak oluşacak maliyet:

Yıllar	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	Top.
Mal.	11×10^9	$\frac{3.5 \times 10^9}{(1.15)^1}$	$\frac{3.5 \times 10^9}{(1.15)^2}$	$\frac{3.5 \times 10^9}{(1.15)^3}$	$\frac{3.5 \times 10^9}{(1.15)^4}$	$\frac{3.5 \times 10^9}{(1.15)^5}$	$\frac{1 \times 10^9}{(1.15)^6}$ $\frac{11 \times 10^9}{(1.15)^6}$	$\frac{3.5 \times 10^9}{(1.15)^7}$	$\frac{3.5 \times 10^9}{(1.15)^8}$	$\frac{3.5 \times 10^9}{(1.15)^9}$	$\frac{3.5 \times 10^9}{(1.15)^{10}}$	$\frac{3.5 \times 10^9}{(1.15)^{11}}$	$\frac{1 \times 10^9}{(1.15)^{12}}$ $\frac{11 \times 10^9}{(1.15)^{12}}$	$\frac{3.5 \times 10^9}{(1.15)^{13}}$	$\frac{3.5 \times 10^9}{(1.15)^{14}}$	$\frac{3.5 \times 10^9}{(1.15)^{15}}$	$\frac{3.5 \times 10^9}{(1.15)^{16}}$	$\frac{3.5 \times 10^9}{(1.15)^{17}}$	$\frac{1 \times 10^9}{(1.15)^{18}}$	

18 yıl için B makinesini iki defa üstüste alarak oluşacak maliyet:

Yıllar	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	Top.
Mal.	18×10^9	$\frac{3.1 \times 10^9}{(1.15)^1}$	$\frac{3.1 \times 10^9}{(1.15)^2}$	$\frac{3.1 \times 10^9}{(1.15)^3}$	$\frac{3.1 \times 10^9}{(1.15)^4}$	$\frac{3.1 \times 10^9}{(1.15)^5}$	$\frac{3.1 \times 10^9}{(1.15)^6}$	$\frac{3.1 \times 10^9}{(1.15)^7}$	$\frac{3.1 \times 10^9}{(1.15)^8}$	$\frac{2 \times 10^9}{(1.15)^9}$ $\frac{18 \times 10^9}{(1.15)^9}$	$\frac{3.1 \times 10^9}{(1.15)^{10}}$	$\frac{3.1 \times 10^9}{(1.15)^{11}}$	$\frac{3.1 \times 10^9}{(1.15)^{12}}$	$\frac{3.1 \times 10^9}{(1.15)^{13}}$	$\frac{3.1 \times 10^9}{(1.15)^{14}}$	$\frac{3.1 \times 10^9}{(1.15)^{15}}$	$\frac{3.1 \times 10^9}{(1.15)^{16}}$	$\frac{3.1 \times 10^9}{(1.15)^{17}}$	$\frac{2 \times 10^9}{(1.15)^{18}}$	

Şimdiki Değer Analizinin Genel Formülü

Şimdiki değer analizinin genel formülünü çıkartabilmek için geometrik serileri bilmemiz/hatırlamamız gerekir.

Geometrik seri, a gibi bir başlangıç elemanından başlayıp, bundan sonraki her elemanın bir önceki elemani r ile çarpılarak elde edilen seridir. Burada r ‘ye ortak oran (common ratio) denir.

$$a, ar, ar^2, \ldots$$

Örneğin $a = 5$ ve $r \; = 2$ olsun. Şu halde geometrik seri :

$$5, 10, 20, 40, 80, 160 \ldots$$

olur.

Geometrik Serinin Elemanlarının Toplamı

Geometrik serinin ilk n teriminin toplamı:

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}$$
$$= a(1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1}) = a\left(\frac{1 - r^n}{1 - r}\right)$$

Şimdiki Değer Analizinin Genel Formülü

Dönem sayısı uzadıkça (10 yıl, 15 yıl gibi…), her yıl yapılan bakımın şimdiki karşılığını ayrı ayrı hesaplamak zahmetli bir iş haline gelir.

Örneğin yıllık %i faizin olduğu bir yerde yıllık bakım ücreti A TL olan bir makinenin önümüzdeki n yıl boyuncaki bakım masraflarının günümüzdeki karşılıklarını hesaplamak istersek:

$$\frac{A}{(1+i)^1} + \frac{A}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{A}{(1+i)^n}$$

olur. Burada ortak olan $\frac{A}{(1+i)}$ parantezine alınırsa

$$\frac{A}{(1+i)}\left(1 + \frac{1}{(1+i)^1} + \cdots + \frac{1}{(1+i)^{n-1}}\right)$$

olur. Yukarıda toplam başlangıç elemanı $a = \frac{A}{(1+i)}$, ortak oranı $r = \frac{1}{(1+i)}$ olan bir geometrik serinin toplamıdır. Geometrik serilerinin toplam formülünde a ve r yerlerine konulursa

Şimdiki Değer Analizinin Genel Formülü

$$= \frac{A}{(1+i)}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{(1+i)}\right)^n}{1-\frac{1}{(1+i)}}\right) = A\left(\frac{(1+i)^n-1}{(1+i)^n\cdot i}\right)$$

olur. Sonuç olarak Her yıl A birim masrafi olan yada A birim gelir getiren n. yılın sonundaki toplam masrafi yada gelirini hesaplamak için A'yi

$$\boxed{\left(\frac{(1+i)^n-1}{(1+i)^n\cdot i}\right)}$$

katsayısı ile çarparız; işte bu aradığımız formüldür.

Örnek olarak yıllık %20 faizin olduğu bir yerde yıllık bakımı15K TL olan bir makinenin 10 yıllık bakım ücretinin <u>şimdiki ederi</u>:

$$15{,}000\left(\frac{(1+0.2)^{10}-1}{(1+0.2)^{10}\cdot 0.2}\right) \cong 62{,}887\ TL$$

Sonsuz Ömürlü Alternatiflerin Şimdiki Değer Analizi

Bazı alternetiflerin ömrü, daha önce gördüğümüz alternatiflerin aksine hiç tükenmez, ek yatrımlarla, bakımlarla ömürleri sonsuz olarak uzayabileceği varsayılır. Barajlar, petrol boru hatları, demiryolları gibi devlet yatırımları bu kategoride yer alırlar.

Daha önce gördüğümüz formülü kullanarak sonsuz ömürlü ürünlerin ileride açacağı masrafların şimdiki ederini hesaplayabiliriz. Bu, formüldeki süreyi veren n değişkenin sonsuza yaklaşması ile tahmin edilebilir:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \cdot i}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(1+i)^n}{(1+i)^n \cdot i} - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+i)^n \cdot i}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{i} = \frac{1}{i}$$

olur. Yani yıllık bakım masrafını çarpacağımız **katsayı** $\frac{1}{i}$ dir.

ör. Yıllık faizin %15 olduğu bir yerde yapılan bir barajın ilk yapım maliyeti 8 milyon dolar; yıllık bakım ücreti 25 bin dolardır. Ömrünün sonsuz olduğu varsayılan bu barajın toplam maliyetinin şimdiki değeri nedir?

Çözüm.

$$8{,}000{,}000 + 25{,}000 \cdot \frac{1}{0.15} = 8166667 \text{ dolar}$$

ör. Yıllık faizin %15 olduğu bir yerde, ilk yapım maliyeti 530 K TL olan bir köprünün ilk dört yıl boyuncaki yıllık bakım maliyeti 15 K TL, daha sonraki yıllarda ise her yıl 20KTL dir. Ömrünün sonsuz olduğu varsayılan bu köprünün toplam maliyetinin şimdiki değeri nedir?

Çözüm.

Ilk maliyet: 530,000 TL

Ilk dört yıllık bakim maliyetinin simdiki ederi: $15{,}000\left(\frac{(1+0.15)^4-1}{(1+0.15)^4 \cdot 0.15}\right) = 42824.67$

Eğer bu köprü birinci yıldan beri yıllık 20,000 TL'lik bakıma girseydi ve bu sonsuz defa ödenseydi:

$20{,}000 \cdot \frac{1}{0.15} = 133{,}333$ TL ödenmiş olacaktı. Ama bu bakım ilk 4 yıl uygulanmadığından, uygulanmış gibi düşündüğümüz kısmı sonsuz bakım masrafından çıkarırız:

$$133{,}333 - 20{,}000\left(\frac{(1+0.15)^4 - 1}{(1+0.15)^4 \cdot 0.15}\right) = 90{,}508.33 \ TL$$

Bu, 5 yıldan itibaren sonsuza kadar ödenceği varsayılan yıllık bakım ücretinin şimdki karşılığıdır.

Net Bugünkü Değer (NBD)

Net bugünkü değer, NBD, kısaca bir projenin (ilerideki) nakit girişlerinin bugünkü değerinden, (ilerideki) nakit çıkış değerlerinin bugunkü değerinin çıkarılmasıyla bulunur. Bu işlem sonucunda NBD, 0'dan büyükse '*proje kabul edilebilir*' olarak düşünülür.

ör. 6 yıllık ömrü olan bir makinenin ilk satın alma maliyeti 30K TL, hurda değeri 13K TL olsun. Yıllık faizin %30 olduğu bir yerde, bu makineyi satın alma sonucunda yıllara göre elde edilmesi beklenen gelirler bin TL cinsinden aşağıda belirtilmiştir. Buna göre bu makine alınabilir midir?

Yıllar	**Nakit Girişi (K TL)**
1	10
2	4
3	18
4	15
5	16
6	21

Çözüm.

NBD = $-30 + \left[\frac{10}{(1+0.3)} + \frac{14}{(1+0.3)^2} + \frac{18}{(1+0.3)^3} + \frac{15}{(1+0.3)^4} + \frac{16}{(1+0.3)^5} + \frac{21}{(1+0.3)^6}\right] = +8.081\ TL$ olup makine alınabilir.

ör. Nakit fiyatı $10,000\ \$$ olan bir makine 12 yıl boyunca $1,200\ \$$ ödenerek alınabildiğine göre yıllık faiz oranı nedir?

Çözüm.

12 yıl boyunca ödenecek 1200 dolarin şimdiki ederi:

$$1200\left(\frac{(1+i)^{12}-1}{(1+i)^{12}\cdot i}\right)$$

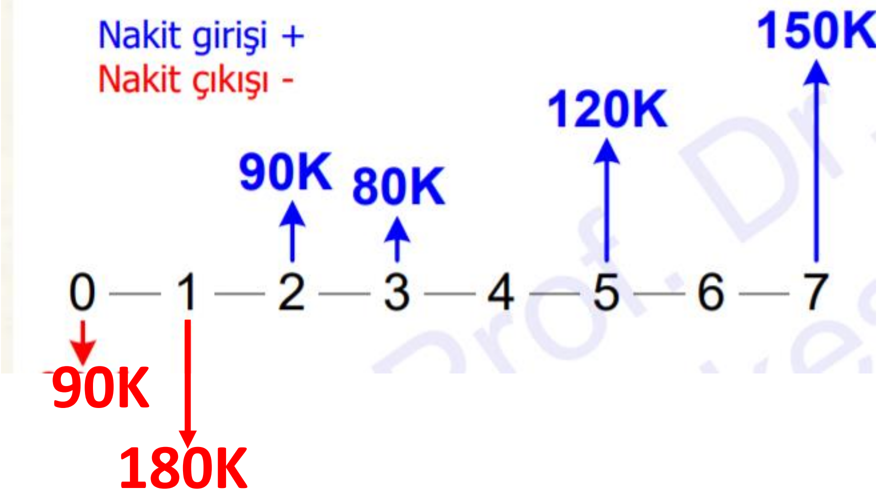
olur. Bu şimdiki $10,000\ \$$,'a eşit olduğuna göre ikisi eşitlenir:

$$1,200\left(\frac{(1+i)^{12}-1}{(1+i)^{12}\cdot i}\right) = 10,000$$

Buradan $i, 0.0611$ yani %6.11 olarak bulunur.

ör. Diyelimki ilk başta 90 K TL ve bir yıl sonra 180K TL para yatirarak bir yatirim yapıyoruz. Bu yatırım, 2., 3., 5. ve 7. yıllarda sırasıyla 90K, 80K, 120K ve 150K TL gelir getiriyor. Buna göre faiz oranı ne olmalıdır ki, bu yatırım karlı bir yatirim olsun?

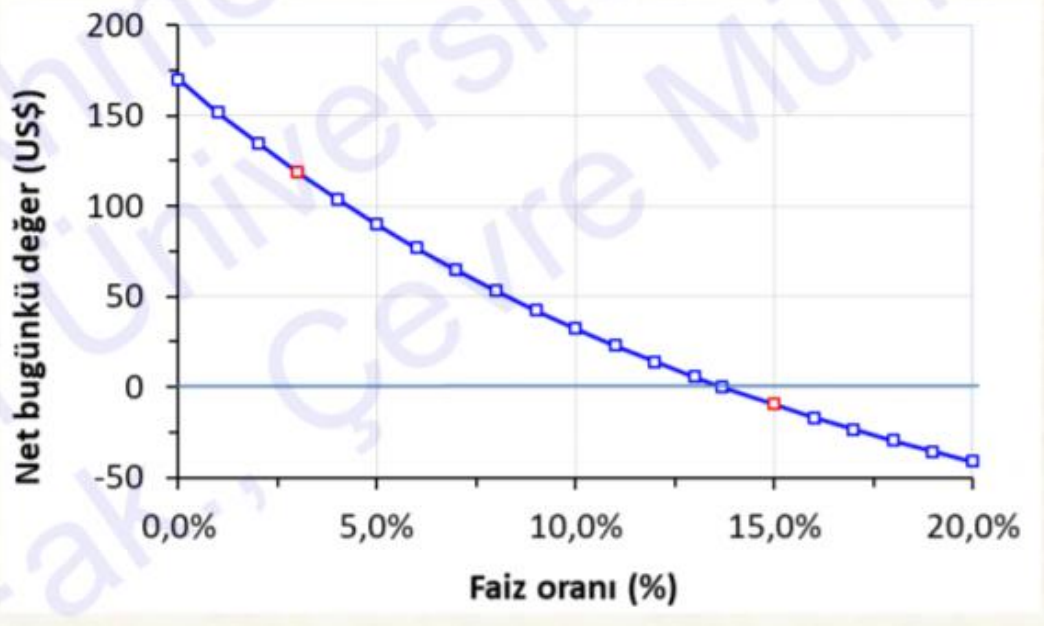
Çözüm. Bu yatırıma ait nakit akış şeması:



$$NBD_{(i)} = -90K - 180K \times (P/F,\%i,1) + 90K \times (P/F,\%i,2) + 80K \times (P/F,\%i,3) + 120 \times (P/F,\%i,5) + 150 \times (P/F,\%i,7)$$

$$NBD_{(i)} = -90K - 180K \times \frac{1}{(1+i)^1} + 90K \times \frac{1}{(1+i)^2} + 80K \times \frac{1}{(1+i)^3} + 120K \times \frac{1}{(1+i)^5} + 150K \times \frac{1}{(1+i)^7}$$

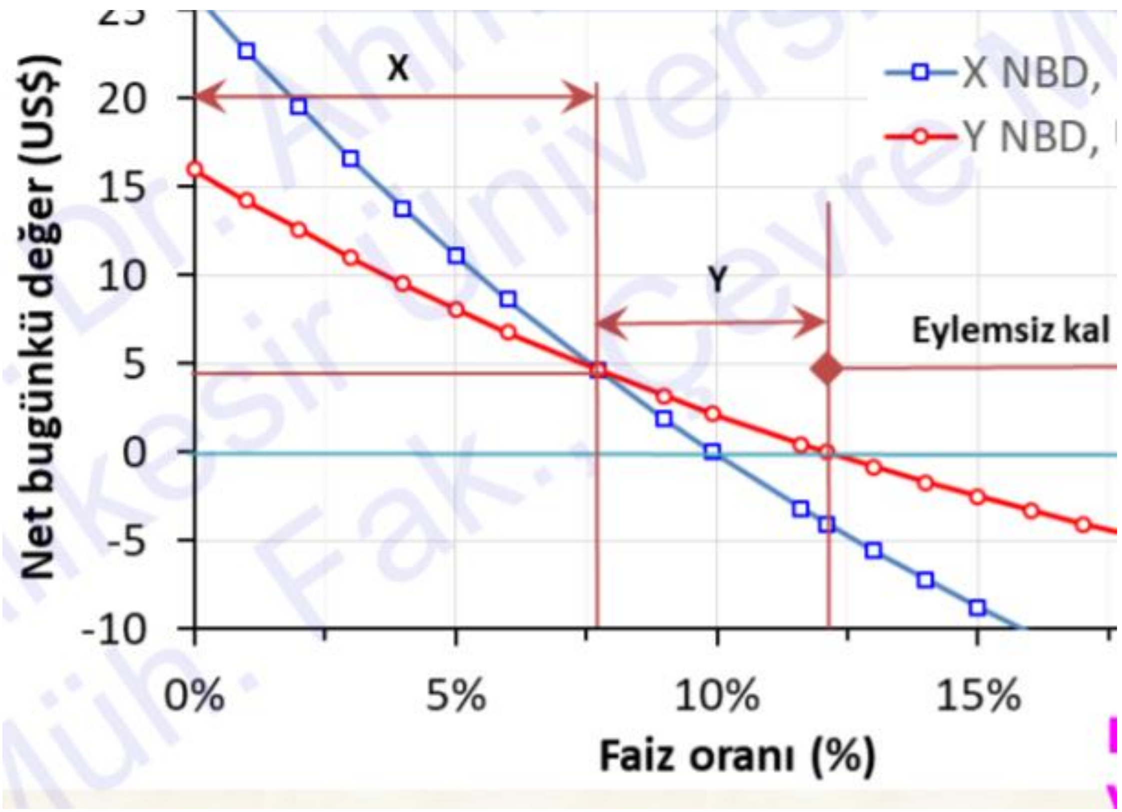
Yıllık faiz oranı %13'den az olsun ki; NBD pozitif olsun; dolayısıyla bu karlı bir yatırım olsun.



$i = 0{,}13693$

$i \cong \%13{,}70$

ör. Farklı faiz oranlarına karşılık, X ve Y yatrimilarina ait NBD ‘ler aşağıda grafikte verilmiştir.



Buna göre yaklaşık %8’e kadarken, X yatirimi Y yatirimindan daha karlı; faiz %8 - %12 arasında iken Y yatirimi daha karli; oran %12 ‘den fazla iken her iki yatirimda karsız olup; bu durumda eylemsiz kalmak, yani herhangi bir yatirimda bulunmamak daha akıllıcadır.

Net Gelecekteki Değer (NGD)

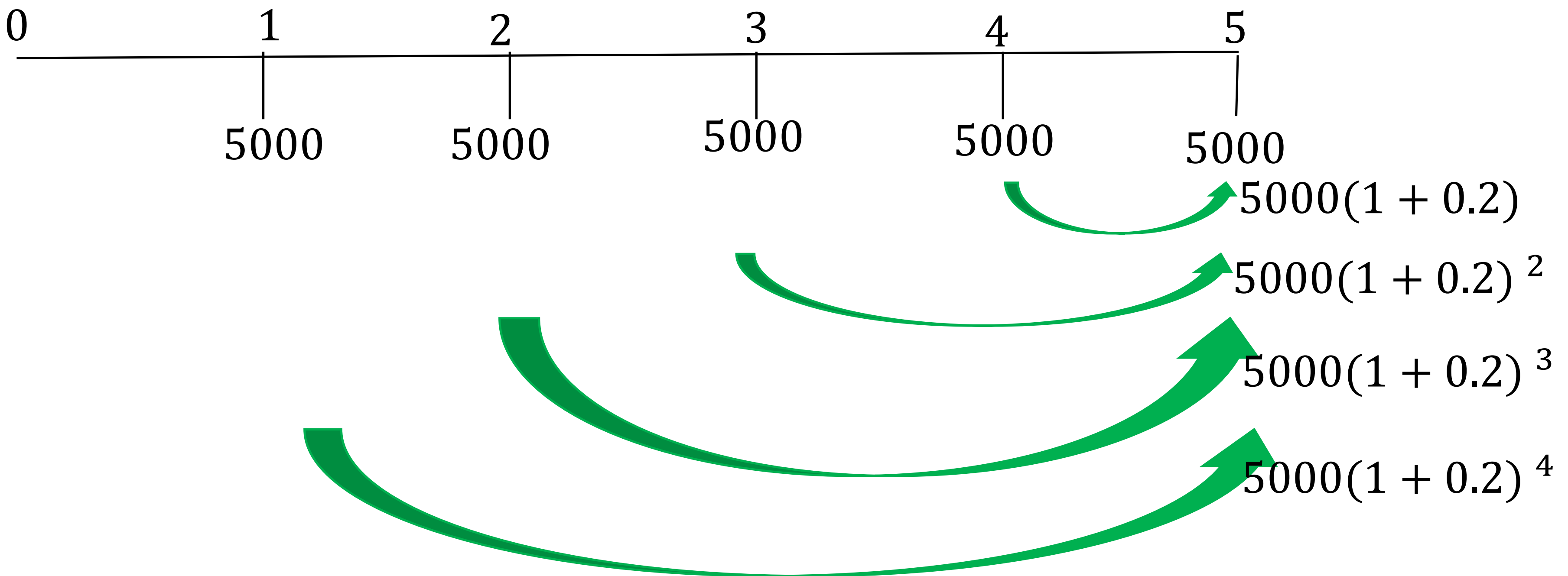
Net gelecekteki değer, NGD, kısaca bir projenin gelecekteki nakit girişlerinin gelecekteki değerinden, gelecekteki nakit çıkış değerlerinin gelecekteki değerinin çıkarılmasıyla elde edilir. Karar verilirken NBD'de olduğu gibi eğer hesaplanan NGD değeri pozitif ise olumlu; değilse proje hakkinda olumsuz karar verilir.

NGD 'yi hesaplamaya başlamadan, hazırlık olması bakımından şu örneği düşünelim.

ör.Diyelimki yıllık %20 faiz veren bir bankaya gelecek yıldan başlayarak önümüzdeki 5 yıl boyunca her yıl 5000 dolar yatiriyoruz. 5. yılın sonunda bankadan ne kadar çekeriz?

Çözüm.

Nakit akış şeması:



Ilk yatirdığımız para 5 yıl boyunca faiz kazandırıyor; ikinci yatirdigimiz para (birinci yılın sonundaki) 4 yıl boyunca faiz kazandırıyor, üçüncü yatırdığımız para 3 defa faizleniyor…

Gelecekte çekilecek toplam nakit:

$$5000(1+0.2)^{4}+5000(1+0.2)^{3}+5000(1+0.2)^{2}+5000(1+0.2)+5000=37{,}208$$

olur. İkıncı bir yol olarak bu toplamı şu şekilde yazarak:

$$=5000\,[1+(1+0.2)+(1+0.2)^{2}+(1+0.2)^{3}+(1+0.2)^{4}]$$

5000 ifadesini geometrik serinin ilk elemanı (a), $(1+0.2)$ ise ortak oran (r) olarak düşündüğümüzde daha önce gördüğümüz geometrik serilerin toplam formulünü kullanabiliriz: $a\left(\frac{1-r^n}{1-r}\right)$. O halde toplam:

$$5000\left(\frac{1-(1+0.2)^5}{1-(1+0.2)}\right)=37{,}208$$

1’den başlayan ve $(1+i)$ ortak orana sahip olan (yani her terim bir öncekinin $(1+i)$ katı olan) bir geometrik serinin ilk n elemanının toplamı:

$$1+(1+i)+(1+i)^{2}+\cdots+(1+i)^{n-1}=\frac{1-(1+i)^{n}}{1-(1+i)}$$

olup, basit bir düzenleme ile aşağıdaki formül bulunur:

$$\boxed{1+(1+i)+(1+i)^{2}+\cdots+(1+i)^{n-1}=\frac{(1+i)^{n}-1}{i}}$$

Bu formülü net gelecek değer hesaplarında sıkça kullanacağız.

Örneğin bir kişi 30 yıllık çalışma hayatı boyunca her yıl bankaya 1000 Euro yatirir ve banka Euro’ya yıllık %5 faiz verirse, kişi emekli olduğunda bankadan:

$$1000\times\frac{(1+0.05)^{30}-1}{0.05}=66{,}438$$

Euro olarak alır.

ör. Bir işletmeye bir makine alınması planlanmaktadır. Bu makineye ait bilgiler aşağıdaki gibidir.

Alış fiyatı	400 K TL
Yıllık işletme gideri	30 K TL
Yıllık hasılat	170 K TL
Hurda değeri	100 K
Ekonomik ömrü	6 yıl

Faiz oranı %25 iken NGD şöyle hesaplanır:

$$NGD = -400(1 + 0.25)^6 + (-30 + 170)\frac{(1 + 0.25)^6 - 1}{0.25} + 100 = 150.352\ TL$$

olup, NGD pozitif bulunduğundan bu makineyi almak yararlıdır olarak düşünülebilir.

ör. Yıllık faiz %30 iken bir şirket aşağıdaki bilgilere sahip bir depo kurmak istemektedir. Bu deponun NGD'si nedir?

Deponun yıllık geliri	150 K TL
Depo maliyeti	200 K TL
Yıllık genel giderler	50 K TL
Deponun hurda değeri	125 K TL
Ekonomik ömrü	30 yıl

Çözüm.

$$NGD = -200(1+0.3)^{30} + (-50+100)\frac{(1+0.3)^{30}-1}{0.3} + 314{,}204.5\ TL$$

ör. Fabrikaya alınmak istenen bir makinenin hurda değeri satınalma maliyetinin %5'i kadardır, ve ömrü 10 yıldır. Bu makine yıllık 40, 000 $ gelir getirmektedir. Yıllık faizin %15 olduğu bilindiğine göre bu makinenin satınalma maliyeti en fazla ne kadar olabilir?

Çözüm.

Herhangi bir zararar uğramamak için makinenin satın alma maliyeti en fazla kazandırcağı gelir kadar olmak zorundadır.

Makinenin satın alma maliyetine P diyelim. Hurda değeri $P/20$ olur.

İki şekilde maksimum ^P'yi hesaplayabiliriz: NBD veya NGD ile.

NBD ile hesaplayalım. Yani bütün para birimlerini günümüze getirelim.

$$-P+\frac{\frac{P}{20}}{(1+0.15)^{10}}+40{,}000\left(\frac{(1+0.15)^{10}-1}{(1+0.15)^{10}\cdot 0.15}\right)=0$$

Yada NGD ile hesaplayıp tüm birimleri 10yıl sonraya taşıyalım:

$$-P(1+0.15)^{10}+\frac{P}{20}+40{,}000\left(\frac{(1+0.15)^{10}-1}{0.15}\right)=0$$

Iki denklemde de P yaklaşık $203{,}240$ bulunur.