Mühendislik Ekonomisi

Fırat İsmailoğlu, PhD

Hafta 5
Paranın Zaman Değeri -1
(Basit ve Bileşik Faiz)

Faiz: Paranın Zaman Değeri

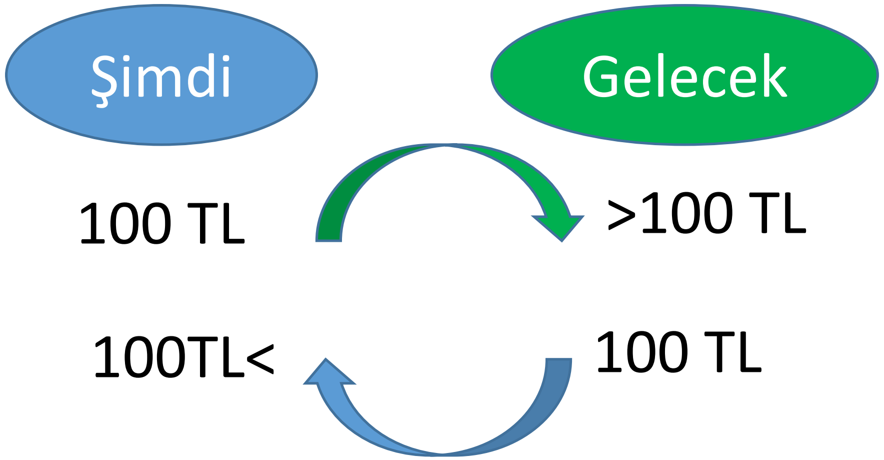
Paranın zaman değeri, paranın zamanla olan ilişkisini açıklamaya yarar. Burada iki temel amacımız vardır:

1. Şuanki paranın gelecekte edeceği değeri hesaplamak
2. Gelecekteki bir paranın şuanki karşılığını hesaplamak.

Basitçe örnek vermek gerekirse 100 TL belrili bir zaman sonraki (1 yıl, 6 ay, 3 gün, 4 yıl..) 100 TL ile aynı değildir.

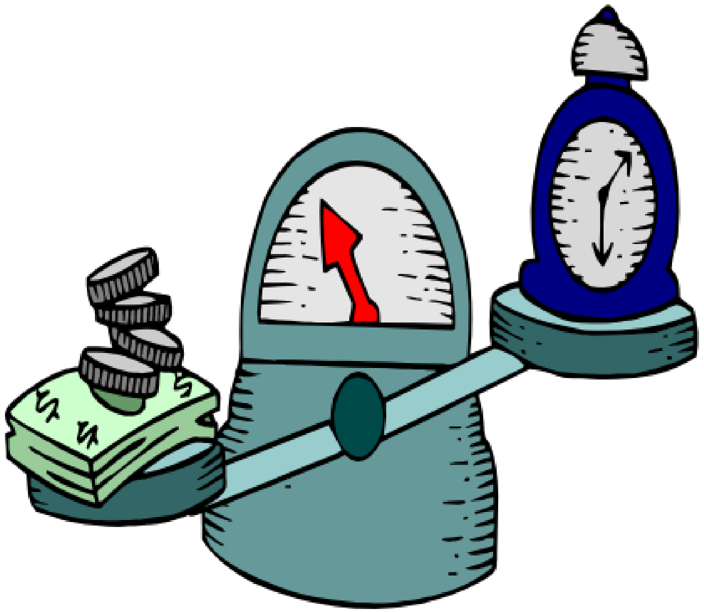
Aynı şekilde gelecek bir zamandaki 100 TL şuanki 100 TL ile aynı değildir.

Şuanki paranın gelecekte ne kadar olacağı, gelecekteki bir paranın şuan ne kadar ettiği ***faiz*** ile açıklanır.



Faiz: Paranın Zaman Değeri

Not: Burada paranın zamanla değer kazanmasını, yada gelecekteki bir miktar paranın günümüzde değerinin daha az olmasını enflasyonla ilişkilendirmiyoruz. Enflasyonun sıfır olduğu yerlerde dahi faiz vardır, para zaman içinde daha fazla para kazandırabilir.



Faizle İlgili Temel Kavramlar		
Açıklama	Kısaltma	Birim
Paranın Şimdiki Değeri (Present)	P	$, TL..
Paranın Gelecekteki Değeri (Future)	F	$, TL..
Faiz Periyodu (Süre)	n	(yıl,ay, gün)
Faiz (interest)	i	%

Şimdiki Paranın Gelecekteki Değeri

1. Basit Faiz

Basit faiz, P şuanki paranın n dönem sonunda i faiz oranıyla getirdiği/kazandırdığı faizdir. Yalnızca anapara P'nin kendinden elde edilir, bu paradan gelen faiz yeniden bir faiz getirmez, kısaca:

$$\boxed{\text{basit faiz: } P \times i \times n}$$

şeklinde verilebilir.

ör. 6000 TL mevduat, yıllık %18 faizden 5 yıllığına basit faizle bankaya yatırılırsa, getirceği faiz:

$$6000 \times 0.18 \times 5 = 5400$$

Bunu şöyle de düşübeniliriz:

1.yılın sonunda getirdiği faiz:	$6000 \times 0.18 = 1080$
2.yılın sonunda getirdiği faiz:	$6000 \times 0.18 = 1080$
3.yılın sonunda getirdiği faiz:	$6000 \times 0.18 = 1080$
4.yılın sonunda getirdiği faiz:	$6000 \times 0.18 = 1080$
5.yılın sonunda getirdiği faiz:	$6000 \times 0.18 = 1080$
Toplam:	5400

Dikkat edilirse her yıl aynı para faize giriyor! O yüzden her yılın geliri aynı.
Mevduat sahibi her yıl elde ettiği faizi alıyor, ana para yeniden faize giriyor.

Basit Faizin Farkı Sürelerde Işletilmesi

Bir önceki formüldeki $(i \times n)$, katsayısını n dönemlik bir süre için uygulana tek bir faiz gibi düşünebiliriz. Örneğin bir önceki sorudaki yıllık %18 faizi 5 yıllık bir süre için tek bir defalık %90 bir faiz gibi düşünebiliriz. Bu şekilde düşününce yani faiz ile dönemi çarparak farklı sürelerdeki (basit) faizi hesaplayabiliriz.

Yıllık faizi günlük düşünelim: Yıllık $\%i$ faizin g gündeki karşlığı: $i \times \left(\frac{g}{365}\right)$

Yıllık faizi haftalık düşünelim: Yıllık $\%i$ faizin h haftadaki karşlığı: $i \times \left(\frac{h}{52}\right)$

Yıllık faizi aylık düşünelim: Yıllık $\%i$ faizin m aydaki karşlığı: $i \times \left(\frac{m}{12}\right)$

ör. Bir önceki sorudaki gibi 6000 TL mevduatımız ve yıllık %18 faiz veren bir kuruluş olsun. Bu paranın:

i) 432 günlük basit faizi: $6000 \times 0.18 \times \left(\frac{432}{365}\right) = 1278.24$

ii) 24 haftalık basit faizi: $6000 \times 0.18 \times \left(\frac{24}{52}\right) = 498.46$

iii) 44 aylık basit faizi: $6000 \times 0.18 \times \left(\frac{44}{12}\right) = 3960$

2. Bileşik Faiz

Şuanda P birim olan paramız faizin i olduğu bir yerde $P \cdot i$ kadar basit faiz getirecektir, yada başka bir deyişle bu kadar para kazanacaktır. Başlangıçtaki paramız olan P ile bu paranın getirdiği para (faiz) toplandığında paramızın son durumu:

$$P + P \cdot i$$
$$P(1 + i)$$

olur. Bu paraya hiç dokunmadan bir kez daha aynı faiz oranından faize yatırırsak toplam paramız:

$$P(1 + i) + P(1 + i) \cdot i$$
$$P(1 + i)(1 + i)$$
$$P(1 + i)^2$$

Ikinci dönemin sonunda elde ettiğimiz bu paraya hiç dokunmadan bir dönem daha aynı faiz oranından faize yatırırsak toplam paramız:

$$P(1 + i)^2 + P(1 + i)^2 \cdot i$$
$$P(1 + i)^2(1 + i)$$
$$P(1 + i)^3$$

Bu şekilde devam edersek P şuanki paramızın n dönem sonra ulaştığı para:

$$\boxed{P(1 + i)^n}$$

Bileşik Faizin Rekürsif Hesabı

Bileşik faizi rekürsif olarak da hesaplayabiliriz. Az önce bulduk ki P birim para/mevduat, $\%i$ ‘den n dönemliğine bileşik faize yatirilirsa dönem sonunda elde edilecek para: $P(1+i)^n$ olmaktadır:

0. dönem : P

1. dönem : $P(1+i)$

2. dönem $P(1+i)^2$

…

(n-1). dönem: $P(1+i)^{n-1}$

n. dönem: $P(1+i)^n$

Görülüyorki her dönem için elde edilen birleşik faiz bir önceki dönemin (1+i) katı. Yalnızca başlangıç dönemi (dönem 0) için faiz paranın kendisi yani: P. Şu halde basit bir kodla bunu hesaplayabiriz:

```
function donDeger = rekursifBilesik(P, i,n)
if n==0
     donDeger=P;
else
      donDeger=  (1+i)*rekursifBilesik(P, i,n-1);
end
end
```

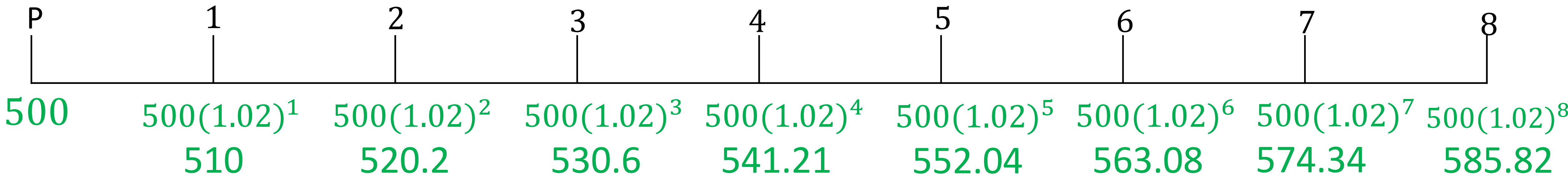
ör. Basit bir örnek olarak diyelimki 500 TL’miz var, ve biz bu parayı aylık %2 faiz veren bir bankaya 8 aylık bir süre için yatırdık. 8 ayın sonunda bankadaki paramız ne kadar olur?

Çözüm. %2 aylık faizden 8 ayın sonunda 500 TL’miz:

$$500 \cdot (1+0.02)^{8}$$

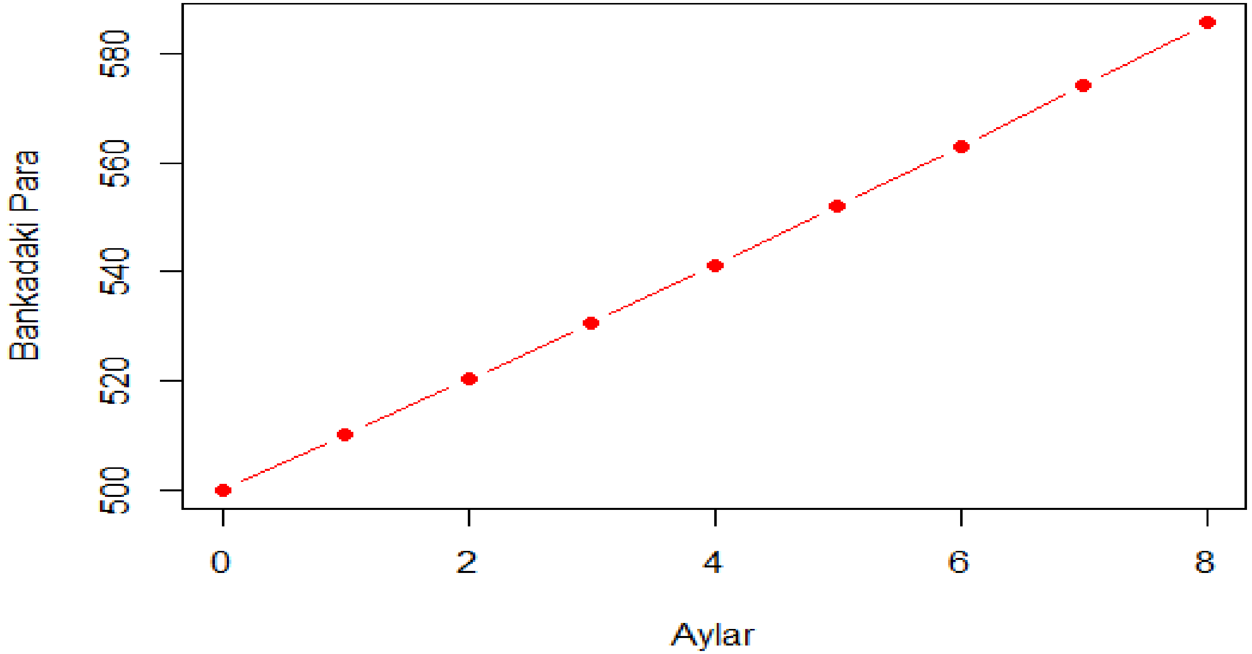
$= 585.82$ olur. Buradan anlamamız gereken şudur. *Şuan için cebimizde bulunan 500 TL, sekiz ay sonrasının 585.82 TL’sine eşittir. Başka bir deyişle 500 TL sekiz ayda 85.82 TL para kazanmıştır*.

Şimdi bu 500 TL’nin sekiz ay boyuncaki yolculuğuna bakalım:



P	1	2	3	4	5	6	7	8
500	$500(1.02)^1$	$500(1.02)^2$	$500(1.02)^3$	$500(1.02)^4$	$500(1.02)^5$	$500(1.02)^6$	$500(1.02)^7$	$500(1.02)^8$
	510	520.2	530.6	541.21	552.04	563.08	574.34	585.82

Dikkat edilirse 500 TL ilk bir ayda 10 TL kazandırmış, birinci aydan ikinci aya geçerken birinci aydaki paraya göre 10.2 TL kazandırmış, ikinci aydan üçüncü aya geçerken ikinci aydaki paraya göre 10.4 TL kazandırmış, üçüncu aydan dördüncü aya geçerken üçüncü aya göre 11.21 TL kazandırmıştır.. Periyotlar aynı olmasına rağmen (bir aylık periyotlar) giderek daha fazla kazandırmıştır. Bunun nedeni ne olabilir?



Yukarıda bahsedildiği gibi her ay bir öncekine göre parada daha fazla artış miktarı olur. Yani artış miktarı artarak ilerler. Bu da yandaki gibi pozitif eğime sahip bir eğriye neden olur.

ör. Şimdi 18000'lik bir parayı aylık %2 faizin verildigi bir bankaya 2.5 yıllığına bileşik faiz alacak şekilde yatıralım.

Faiz aylık olarak verildiğinden süreyi de aylığa çevirebiliriz: 2.5 yıl=30 ay olur. Bu durumda n'yi, yani dönem sayısını 30 almamız gerekir. Şu halde 30 ay sonunda bileşik faizle alınacak para: $18000(1+0.02)^{30}= 32604.51$

Yada aylık faizi yıllığa çevirebiliriz: %2 aylık faiz, yıllık %24 faiz demektir. O halde 2.5 yıl sonunda alınacak bileşik faiz: $18000(1+0.24)^{2.5}= 30819.58$

Aynı şeyi yapmış gibi gözüksekte arada 2000 TL'ye yakın bir fark oluştu. Bu farkın neden oluştuğunu önümüzdeki hafta göreceğiz.

Gelecekteki Paranın Şimdiki Değeri

Bu bileşik faizin tam tersidir. Faizin i olduğu bir ortamda n dönem sonra P birim para bileşik faizle $P(1+i)^n$ ettiğini bulduk. Buna, yani ilerideki paraya, F diyelim. O halde

$$F = P(1+i)^n$$

olur. Buradan P yalnız bıakılırsa

$$\boxed{P = \frac{F}{(1+i)^n}}$$

olur. Yani n dönem sonra $\%i$ bileşik faizle elde edilecek F birim paranın şimdiki değerini bulmak için F'yi, $(1+i)^n$'e böleriz.

ör. Yıllık faizin %22 olduğu bir ülkede biri size 3 yıl sonra 6000 TL vermeyi yada şimdi 3200 TL vermeyi teklif ediyor. Bu iki tekliften hangisini tercih edersiniz?

$F = 6000, i = 0.22, n = 3$ olur. Bu paranin şimdiki değeri $\frac{6000}{(1.22)^3} = 3304.24$ TL'die, bu ise bize şimdi vermeyi teklif ettikleri 3200 TL'den fazladır. O halde 3 yıl sonraki 6000 TL'yi almak daha akıllıcadır.

ör. Yıllık %10 faiz veren bir bankadan iki yılın sonununda 1000TL alınmak istenirse, bugün bankaya ne kadar yatrilmasi gerekir?

Çözüm. %10'luk faizin verildiği bir yerde 2 yıl sonraki 1000 TL'nin şimdiki değeri $\frac{1000}{(1+0.1)^2} \cong 826.45$ TL olduğundan, eğer bugün bankaya 826.45 TL yatırılırsa iki yıl sonra bankadan 1000 TL olarak alınır.

Başka bir deyişle bugünün 826.45 TL'si iki yıl sonranin 1000 TL'sine denktir.

ör. Biri bir yıl sonra, diğeri iki yıl sonra ödenmek üzere iki adet 500 TL'lik taksidiniz olsun. Yıllık %10 faiz veren bir bankaya bu taksitleri ödemek için şimdiden para yatırıyorsunuz. Bu bankaya şimdi ne kadar para yatırmanız gerekir?

Çözüm. Bir yıl sonraki 500 TL'nin %10 'luk faiz ortaminda şimdiki değeri $\frac{500}{1+0.1} = 455$ TL.

İki yıl sonraki 500 TL'nin %10 'luk faiz ortaminda şimdiki değeri $\frac{500}{(1+0.1)^2} = 413$TL.

O halde bugün bankaya 455+413=868 TL yatırmamız gerekir.

ör. Yıllık %10 bileşik faiz ile 5000 € para borç alınmıştır. Para 3 yıl sonra bir defada toplu olarak geri ödenecektir. Geri ödenecek toplam para miktarı ne kadardır?

Çözüm.

3 yıl sonra ödenecek para: $5000(1+0.1)^3 = 6655$ €.

ör. Yıllık %7 oranında bileşik faiz ödemesi yapan bir tasarruf hesabında, 4 yıl sonra 5000€ birikmesi isteniyor. Bugün hesaba kaç para yatırılmalıdır?

Çözüm.

4 yıl sonraki 5000€ ‘nun şimdiki karşılığı $\frac{5000}{(1.07)^4} = 3814€$