

Mühendislik Ekonomisi

Fırat İsmailoğlu, PhD

Hafta 6

Paranın Zaman Değeri -2

Yıllık Faizin Aylık Hesaplanması

Diyelimki bir banka alınan kredilere yıllık % i bileşik faiz uygulasin. Eğer banka bu yıllık faizi aylık uygularsa 12 defa (12 dönem) % $(i/12)$ aylık faiz uygulanmış olur.

Bu durumda P parası yıl sonunda $P(1 + \frac{i}{12})^{12}$ olarak ödenmek zorunda kalır. Ve bu para yıllık faizin bir kere uygulanmasıyla ödenecek olan $P(1 + i)$ 'den fazladır.

ör. Diyelimki yıllık %24 faiz olan bir bankadan 100,000 TL 'lik bir kredi kullandınız.

Eğer yıllık faiz bir defa yıl sonunda alınırsa bir yılın sonunda ödeyeceğiniz para:

$$100,000(1 + 0.24) = 124,000$$

TL olur; fakat yıllık faiz her ay uygulanırsa :

$$100,000(1 + 0.02)^{12} = 126,834$$

TL olurki, bu miktar yıllık faizin bir kere uygulanmasından daha fazladır.



ör. Diyelimki yıllık %35 faizle 5 yıl vadeli 100,000 TL kredi kullandınız. Bu durumda eğer banka

i) yıllık faizi yıllık olarak uygulanırsa $100,000(1 + 0.35)^5 = 448,403$ TL olarak ödenir.

ii) yıllık faiz aylık olarak uygulanırsa aylık faiz oranı $0.35/12$ olur, toplam 60 ay için bu para $100,000(1 + 0.35/12)^{60} = 561,232$ TL olarak ödenir.

Aylık Uygulanan Yıllık Faiz Miktarının Yıllık Karşılığı

Yıllık % i faizin P birim paraya her ay uygulanmasıyla yıl sonunda ödeyeceğimiz toplam para:

$$P\left(1 + \frac{i}{12}\right)^{12}$$

idi. Şu halde $P\left(1 + \frac{i}{12}\right)^{12} - P = P\left(\left(1 + \frac{i}{12}\right)^{12} - 1\right)$ kadar faiz ödemiş oluruz. Eğer P birim paraya bu faizi ödersek 1 birim paraya

$$\left(1 + \frac{i}{12}\right)^{12} - 1$$

faiz ödemiş oluruz.



İlk örnekte yıllık %24 faizin her ay uygulandığını görmüştük. Aylık %2 olarak uygulanan bu faizin yıllık karşılığı:

$$\left(1 + \frac{0.24}{12}\right)^{12} - 1 = 0.268$$

olur. Bu da demektir ki bize yıllık %24 uygulanacağı söylenen faiz reelde yıllık %26.8 olarak uygulanmaktadır.

Sonraki örnekte ise yıllık %35 faizi aylık $0.35/12$ olarak ödemiştik. Bunun yıllık karşılığı

$$\left(1 + \frac{0.35}{12}\right)^{12} - 1 = 0.411$$

dir. Yani reelde maruz kaldığımız yıllık faiz %41.1'dir.

Eğer 5 yıl vadeli alınan 100,000 TL'ye %35 bileşik faiz her ay uygulanırsa reelde yıllık %41.1 faiz uygulanmış olur. O halde 5 yılın sonunda ödenecek para :

$$500,000(1 + 0.411)^5 = 561,232 \text{ TL olur.}$$

Bu şekilde yıllık faizi önce aylığa sonra tekrar yıllığa çevirerek reeldeki yıllık faizi bulur, klasik birleşik faiz formülüyle ne kadar ödeyeceğimizi bulabiliriz.



Şimdi daha genel bir formül elde edelim. n bir yıl içerisinde uygulanan **dönem sayısını** gösterebiliriz, yani toplam kaç faiz dönemi olduğunu gösterebiliriz. Örneğin üç ayda bir faiz uygulanacaksa bu dört döneme denk gelir; n burada 4 olur.

Şu halde yıllık $\%i$ faizin olduğu bir yerde n dönem boyunca faiz uygulanırsa reeldeki yıllık faiz:

$$\left(1 + \frac{i}{n}\right)^n - 1$$

formülüyle hesaplanır.

Örnek olarak yıllık $\%30$ faizin olduğu bir bankada her iki ayda bir faiz tahsil edilirse, bankanın reelde uyguladığı faiz aslında ne kadar olur?

Banka her iki ayda bir faiz tahsil ediyorsa bu, yılda 6 döneme denk gelir, yani banka yılda 6 defa faiz uyguluyordur. Şu halde reel yıllık faiz:

$$\left(1 + \frac{0.3}{6}\right)^6 - 1 = 0.34$$

olur. Bu da demektir ki banka aslında yıllık $\%34$ faiz uyguluyordur.



ör. Yıllık %16 faiz uygulayan bir banka çekilen her kredi için üç ayda bir faiz işletiyor. Buna göre çekilen 120,000 TL kredi 5 yıl sonra ne kadar olarak ödenir?

Çözüm.

I.yol: Üç ayda bir faiz işletilmesi bir yılda 4 defa $0.16/4=0.04$ faizin işletileceği anlamına gelir. Şu halde yıllık reel faiz

$$\left(1 + \frac{0.16}{4}\right)^4 - 1 = 0.169$$

olur. 5 yıl boyunca bu reel faiz 120,000 TL'ye uygulanırsa:

$$120,000(1 + 0.169)^5 = 262,934 \text{ TL}$$

II.yol: Her üç ayda $0.16/4=0.04$ faiz uygulayan banka, 5 yıl boyunca toplamda yılda 4 dönemden toplam 20 dönem bu faizi uygular. O halde klasik formülümüzden

$$120,000(1 + 0.04)^{20} = 262,934 \text{ TL}$$

elde edilir.



$$\left(1 + \frac{i}{n}\right)^n - 1$$

Yukarıdaki formülde $\frac{i}{n}$ aylık uygulanan faizdir. Bu faiz her defasında yıllık faizin dönemlere bölünmesiyle elde edilmez. Bazen bu faiz direk verilir.

Diyelimki bir banka alınan her kredi için her ay i_{ay} faiz uyguluyor. Bu durumda yıl sonunda ödenen toplam (reel) faiz:

$$\left(1 + i_{ay}\right)^{12} - 1$$

olur.

Örneğin her ay uygulanan %2.5 kredi kartı faizinin yıllık reel değeri:

$$(1 + 0.025)^{12} - 1 = 0.344$$

olur. Yani diyebilirizki banka kredi kartına uyguladığı yıllık faiz %34.4'tür.



Peki ya banka yıllık faize günlük faiz uygularsa ne olur?

Bu durumda n , yani periyot, 365 olur; çünkü bu durumda banka 360 **defa** faiz alıyordur. Şu halde formül:

$$\left(1 + \frac{i}{365}\right)^{365} - 1$$

şeklinde düzenlenebilir, fakat bu yeni bir formül değildir, yalnızca bir önceki formülde n yerine 365 yazılmıştır. Bir önceki örnekte yıllık %30 faiz uyguladığını iddia eden banka, eğer bu faizi günlük işletirse, aslında reel yıllık faiz:

$$\left(1 + \frac{0.3}{365}\right)^{365} - 1 = 0.349$$

olur; bu biraz önce gördüğümüz faizin iki aylık periyotlarla uygulanmasından da yüksektir. Şu halde genel olarak şöyle düşünebiliriz: bir banka ne kadar sık faiz işletiyorsa aslında reelde o kadar çok faiz alır.

Son olarak eğer banka yıllık faizi haftalık işletirse ne olacağını düşünelim. Bu durumda $n = 52$ olur, çünkü bu durumda banka yıl içinde 52 defa faiz uygular. O halde formülümüz:

$$\left(1 + \frac{i}{52}\right)^{52} - 1$$

Bir önceki örnek için haftalık uygulanan yıllık faiz $(1 + 0.3/52)^{52} - 1 = 0.348$ olur.

ör.Üç ay vadeye %16 faiz veren bir Hazine bonosuna yatırılan 100,000 TL para 2. ayın sonunda çekilirse, ne kadar para elde edilir?

$$100,000 \left(1 + 0.16 \times \frac{2}{3} \right) = 110.66$$

Dönem Sonu Faizlerin Dönem İçi Faizleri

Daha önce yıllık faizin % i olduğu bir yerde, bu faiz n dönem boyunca uygulanırsa (yani n defa), bu durumda reel yıllık faizin şu şekilde hesaplanacağını söylemiştik:

$$i_{yillik_reel} = \left(1 + \frac{i_{yillik}}{n} \right)^n - 1$$

Burada $\frac{i_{yillik}}{n}$ bir dönemlik faizdir (dönemlik faiz olarak da düşünebiliriz). Bu faiz yukarıdaki eşitlikte yalnız bırakılırsa

$$\sqrt[n]{i_{yillik_reel} + 1} - 1$$

elde edilir.

Bu, her dönem uygulanan yıllık reel faizin bir dönemdeki miktarıdır.



Örneğin diyelimki bir bankada aldığımız krediye yıllık %20 faiz her ay uygulanıyor. Bu durumda kredimize uygulanan aylık reel faiz:

$$\sqrt[12]{0.2 + 1} - 1 = 0.015 = \%1.5$$

olur.

Devamlı Bileşik Faiz

Yıllık yüzde i faizin yılda n defa uygulanmasıyla yıllık

$$\left(1 + \frac{i}{n}\right)^n - 1$$

faiz uygulanmış oluyordu. Eğer yıllık faiz olan i , aylık, günlük değil sürekli uygulanırsa devamlı bileşik faiz ortaya çıkar; bu da n 'in sonsuz olması yada limit durumunda sonsuza gitmesi demektir. Bu halde devamlı faiz:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{i}{n}\right)^n - 1$$

olur.

Şimdi bu faiz hesabını daha basit bir hale getirmeye çalışalım. Eğer $\frac{n}{i}$ yerine h dersek (h değişkeni atarsak), buradan $n = hi$ olur; ayrıca n 'in sonsuza gitmesi demek h 'in sonsuza gitmesi anlamına gelir. Bu durumda $\lim_{m \rightarrow \infty}$ yerine $\lim_{h \rightarrow \infty}$ yazabiliriz, böylece devamlı faiz:



$$\lim_{h \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{h}\right)^{hi} - 1$$

olur. Bu ifade şu şekilde de yazılabilir:

$$\left(\lim_{h \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{h}\right)^h\right)^i - 1$$

olur. Son ifadedeki $\lim_{h \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{h}\right)^h$ aslında bildiğimiz doğal logaritma tabanı olan e sayıdır. O halde devamlı hesaplanan yıllık faiz:

olur.

$$e^i - 1$$

Basitçe şöyle bir örnek verebiliriz. Yıllık %20 faiz devamlı uygulanırsa, yani çektiğimiz krediye sürekli (sonsuz defa) faiz uygulanırsa, reelde karşılaştığımız faiz oranı yıllık

$$e^{0.2} - 1 = 0.221$$

olur; yani bize yıllık %22.1 faiz uygulanmış olur.

Her yıl devamlı faiz uygulanırsa P birim para için n yıl sonunda ödenecek para:

$$P(1 + e^i - 1)^n$$

$$Pe^{in}$$

olur.



ör. Yıllık %16 faizin olduğu bir bankadan sürekli uygulanan faizle 5 yıllığına 120,000 TL kredi çekiyoruz. 5 yıl sonunda bankaya ne kadar ödeme yapmamız gerekir?

Çözüm.

$$120,000 \cdot e^{5 \times 0.16} = 267,064$$

ödememiz gerekir.

Hatırlarsak 5. slayttaki örnekte aynı miktar parayı aynı yıllık faizle aynı süre için, fakat bu sefer 3 aylık periyotlar halinde faiz uygulanacak şekilde çekersek 5 yılın sonunda 262,934 TL olarak ödememiz gerektiğini hesaplamıştık.

Yukarıda ise eğer faiz üç aylık değil sürekli uygulanırsa aynı şartlar altında 267,064 TL ödemiz gerektiğini hesapladık. Bu, *'ne kadar sık aralıklarla faiz uygulanırsa ödeyeceğimiz miktar o kadar artar'* gerçeği ile uyuşmaktadır.



Faiz Türleri

1. Nominal Faiz (Görünen yada Cari Faiz)

Nominal faiz içinde enflasyon da olan piyasada uygulanan faizdir. Bankaların bize önerdiği faiz nominal faizdir.

2. Reel Faiz

Reel faiz enflasyondan arındırılmış faizdir, yani nominal faizden enflasyon oranı çıkınca geriye kalan faiz reel faizdir.

Örneğin yıllık enflasyonun %20 olduğu bir ülkede yıllık %28 faiz veren bir banka reelde %8 faiz veriyordu, bu durumda %8 faiz reel faiz; %28 faiz nominal faizdir.



Enflasyon ve Faiz

Enflasyondan arındırılmış reel faizin, (nominal) faizden enflasyon oranının çıkarılmasıyla bulabileceğimizi söylemiştik. Bu kısmi olarak doğrudur; daha çok enflasyonun ve faiz oranlarının düşük olduğu ülkelerde geçerlidir.

Örneğin yıllık enflasyonun %1, faizin %5 olduğu Japonya'da reel faiz yaklaşık olarak $0.05 - 0.01 = 0.04 = \%4$ 'tür diyebiliriz.

Fakat enflasyon ve faiz arttıkça bu basit yöntem reel faizi hesaplamak için yeterli olmaz.

Bu durumda asıl bakmamız gereken alım gücündeki değişimin oranıdır.

Şimdi diyelimki bugün itibariyle P birim paramız var ve biz bugün itibariyle fiyatı M olan bir maldan almak istiyoruz. Şu halde bugün için alabileceğimiz mal miktarı:

$$\frac{P}{M}$$

olur. Diyelimki P parasın, yıllık $\% i_{nom}$ dan bir yıllığına faize yatırdık. Dönem sonunda paramız

$$P + Pi_{nom}$$

oldu. Diyelimki ülkede yıllık $\% i_{enf}$ enflasyon var. Bu durumda M fiyatına sahip mal, yıl sonunda

$$M + Mi_{enf}$$

oldu. Bu durumda bir yıl sonunda bu maldan

$$\frac{P + Pi_{nom}}{M + Mi_{enf}}$$



kadar alabiliriz. Şimdi $\frac{P}{M}$ kadar alabilirken bir yıl sonra $\frac{P+Pi_{nom}}{M+Mi_{enf}}$ kadar alabiliyoruz. Aradaki fark bizim alım gücümüzdeki değişimdir:

Alım gücü değişimi:

$$\begin{aligned}\frac{P + Pi_{nom}}{M + Mi_{enf}} - \frac{P}{M} &= \frac{P(1 + i_{nom})}{M(1 + i_{enf})} - \frac{P}{M} \\ &= \frac{P(1 + i_{nom}) - P(1 + i_{enf})}{M(1 + i_{enf})} \\ &= \frac{P(i_{nom} - i_{enf})}{M(1 + i_{enf})} \\ &= \frac{P}{M} \times \frac{(i_{nom} - i_{enf})}{(1 + i_{enf})}\end{aligned}$$

olur. Buradaki $\frac{(i_{nom} - i_{enf})}{(1 + i_{enf})}$ alım gücündeki değişimin oranıdır ve aradığımız enflasyondan kurtulmuş reel faizdir.



Sonuç olarak enflasyonun yıllık yüzde i_{enf} olduğu bir ortamda, i_{norm} faiz aldığımızda gerçekte aldığımız faiz yani reel faiz şu formülle hesaplanır:

$$\frac{i_{nom} - i_{enf}}{1 + i_{enf}}$$

ör. Örneğin diyelimki bir ülkede yıllık enflasyon %60, yıllık (nominal) faiz ise %80 olsun. Bu durumda reel faiz:

$$i_{reel} = \frac{1 + 0.8}{1 + 0.6} - 1 = 0.125$$

Yani ülkedeki reel yıllık faiz %12.5 olur. Eğer bu ülke için nominal faizden direkt yıllık enflasyonu çıkarmış olsaydık %20 reel faiz bulurduk ki; bu değer gerçek reel değer olan %12.5'e uzak kalırdı.

Şimdi bu değeri yorumlayalım. Bu ülkede bir yatırımcı parasını faize yatırırrsa gerçekte yıl sonunda %12.5 faiz almış olur. Diyelimki bu ülkede borsa yılda %15 kazandırıyor; bu durumda yatırımcı parasını borsaya yatırması daha akıllıca olur; çünkü borsa %80 **görünen** faizden daha karlıdır.



Dikkat edilirse enflasyon az iken yani, i_{enf} düşük iken, $\frac{i_{nom} - i_{enf}}{1 + i_{enf}}$ formülü ile daha önce reel faizi hesaplamak için kullandığımız $i_{nom} - i_{enf}$ formülünde elde edilen değer birbirine yakın olur.

Örnek olarak yıllık enflasyonun %1 olduğu Japonya'daki %5 nominal faiz aldığımızda reel faiz

$$i_{reel} = \frac{1 + 0.05}{1 + 0.01} - 1 = 0.396$$

Olur. Bu şekilde hesaplanan yıllık %3.96 reel faiz; nominal faizden enflasyonu direkt çıkararak elde ettiğimiz tahmini %4 reel faize çok yakındır.

